Valeur propre d'une Matrice, la fin va vous surprendre

Victor ESTEVE

September 2023

1 Vecteur et valeur propre

1.1 Définition

Soit A une matrice carré, λ est dites valeur propre de A si il existe une matrice colonne non nulle X tel que: $A \cdot X = \lambda \cdot X$. Dans ce cas on appellera X le vecteur propre de A associé à la valeur propre λ. (Une valeur propre peut être associé à plusieurs vecteur propre, mais pas l'inverse!)

Exemple:
1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. En effet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B associé à la valeur propre -5. En effet:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ -40 \end{pmatrix} = -5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$

1.2 Famille libre de vecteur propre

Soit A une matrice carré, $\lambda_1\lambda_2, ..., \lambda_n$ des valeurs propres distincte de A et X_i un vecteur propre associé à λ_i, alors la famille $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ est une famille libre de vecteur.

Preuve:
Nous allons prouver par récurrence sur n, le nombre de vecteur propre.

Initialisation: n=1
Bon nous sachons *Hérédité:*
Supposons que $\{X_1, X_2, .., X_n\}$ est un famille libre. Soit λ_{n+1} une autre valeur propre, X_{n+1} un vecteur propre associé a λ_{n+1}, et $\mu_i \in R$:

$$\begin{aligned}
&\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + ... + \mu_{n+1} X_{n+1} = 0\\
\Rightarrow & A \cdot (\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + ... + \mu_{n+1} X_{n+1}) = 0\\
\Leftrightarrow & \mu_1 A X_1 + \mu_2 A X_2 + ... + \mu_{n+1} A X_{n+1} = 0\\
\Leftrightarrow & \mu_1 \lambda_1 X_1 + \mu_2 \lambda_2 X_2 + ... + \mu_{n+1} \lambda_{n+1} X_{n+1} = 0\\
\Rightarrow & (\mu_1 \lambda_1 X_1 + ... + \mu_{n+1} \lambda_{n+1} X_{n+1}) - \lambda_{n+1}(\mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + ... + \mu_{n+1} X_{n+1}) = 0\\
\Rightarrow & \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) X_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) X_2 + ... + \mu_{n+1}(\lambda_{n+1} - \lambda_{n+1}) X_{n+1} = 0\\
\Leftrightarrow & \mu_1(\lambda_1 - \lambda_{n+1}) X_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_{n+1}) X_2 + ... + \mu_n(\lambda_n - \lambda_{n+1}) X_n = 0
\end{aligned}$$

On a donc $\mu_i(\lambda_i - \lambda_r) = 0$ car $\{X_1, X_2, .., X_n\}$ est libre, et les lambda sont distinct pour tout i entre 1 et $r-1$, donc $\mu_i = 0$.
On a donc plus que $\mu_r X_r = 0$ qui est vrai si et seulement si $\mu_r = 0$ car X_r n'est pas nulle. La famille est donc libre. $\square$

2 Polynômes caractéristiques

2.1 Définition

Soit A un matrice carré de taille n, on nomme polynôme caractéristique de A le polynôme $P(x) = Det(A - x \cdot I_n)$ et valeurs propres de A les racines de son polynôme caractéristique.
Autrement dit, λ est une valeur propre de A si et seulement si $\text{Det}(A - \lambda I_n) = 0$
Cette définition de la valeur propre est équivalente à la première mais je la trouve plus sympa, la preuve de cette équivalence est plutôt simple:

$$\begin{aligned}
\text{Soit } \lambda \text{ une valeur propre de } A &\Leftrightarrow \exists X \in M_{1,n} \backslash \{0_{M_{1,n}}\} \text{ tq } A \cdot X = \lambda \cdot X\\
&\Leftrightarrow \exists X \in M_{1,n} \backslash \{0_{M_{1,n}}\} \text{ tq } (A - \lambda \cdot I_n)\dot{X} = 0_{M_{1,n}}\\
&\Leftrightarrow \exists X \in M_{1,n} \backslash \{0_{M_{1,n}}\} \text{ tq } X \in \text{ Ker}(A - \lambda \cdot I_n)\\
&\Leftrightarrow \text{ Ker}(A - \lambda \cdot I_n) \neq \{0\}\\
&\Leftrightarrow (A - \lambda \cdot I_n) \text{ n'est pas injective}\\
&\Leftrightarrow \text{Det}(A - \lambda \cdot I_n) = 0
\end{aligned}$$

Exemple:
1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on a:

$$\text{Det}(A - x \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x) \cdot (4-x) - 6 = x^2 - 5x - 2$$

$P_A(x) = x^2 - 5x - 2$ est le polynôme caractéristique de A.
Les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(x)$: $\frac{5+\sqrt{33}}{2}$ et $\frac{5-\sqrt{33}}{2}$

2) Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 10 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, on a:

$$\mathrm{Det}(B - x \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 5 \\ 3 & 4-x & 10 \\ 1 & 4 & 5-x \end{vmatrix} = -x^3 + 10x^2 + 22x + 10$$

$P_B(x) = -x^3 + 10x^2 + 22x + 10$ est le polynôme caractéristique de A.
Les valeurs propres de B sont les racines de $P_B(x)$: $(-0.6769), (-1.2397), 11.9166$ (oui j'ai eu a flemme)

2.2 Matrice compagnon

Les matrices ont la chance d'avoir un pote polynôme, mais les polynôme ont ils tous des compagnons?

Propriété:
Soit un polynôme unitaire ($a_n = 1$) de degrés n $P(x) = \sum_{i \geq 0}^{n} a_i x^i$, on nommera matrice compagnon la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Et on aura $(-1)^n P(x)$ le polynôme caractéristique de A

Preuve:
Prouvons par récurrence sur n que la matrice compagnon A de taille n a pour polynôme caractéristique le polynôme $(-1)^n P(x)$.

Initialisation: $n = 1$
On a $A = (-a_0)$, donc $\mathrm{Det}(A - x \cdot I_1) = -x - a_o = (-1)^1 P(x)$

Hérédité:
Supposons que la matrice compagnon A_n de taille n a pour polynôme caractéristique $(-1)^n P_n(x)$.
Démontrons que la matrice compagnon A_{n+1} de taille $n+1$ a pour polynôme caractéristique $(-1)^{n+1} P_{n+1}(x)$.

$$\mathrm{Det}(A - x \cdot I_{n+1}) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & \cdots & -a_0 \\ 1 & -x & \cdots & \cdots & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_n - x \end{vmatrix}$$

On développe sur la première ligne

$$= -x \begin{vmatrix} -x & 0 & \cdots & \cdots & -a_1 \\ 1 & -x & \cdots & \cdots & -a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -a_n - x \end{vmatrix} + (-1)^{n+1} a_0 \begin{vmatrix} 1 & -x & o & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -x & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Par hypothèse de récurrence pour le déterminant de gauche,
par simple calcul de déterminant à droite.

$$= -x(-1)^n (\sum_{i=0}^{n} a_{i+1} xi) + (-1)^{n+1} a_0$$
$$= (-1)^{n+1} P_{n+1}(x)$$

□

2.3 Théorèmes

Théorème 1:
Si deux matrice sont semblables, elles ont le même polynôme caractéristique.

Preuve:

$$\begin{aligned} A = P^{-1} \cdot B \cdot P &\Leftrightarrow (A - x \cdot I_n) = P^{-1} B P - x \cdot I_n \\ &\Leftrightarrow (A - x \cdot I_n) = P^{-1} B P - x \cdot (P^{-1} I_n P) \\ &\Leftrightarrow (A - x \cdot I_n) = P^{-1} B P - P^{-1} (x \cdot I_n) P \\ &\Leftrightarrow (A - x \cdot I_n) = P^{-1} (B - x \cdot I_n) P \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A - x \cdot I_n) = \mathrm{Det}(P^{-1} (B - x \cdot I_n) P) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A - x \cdot I_n) = \mathrm{Det}(P^{-1}) \cdot \mathrm{Det}(B - x \cdot I_n) \cdot \mathrm{Det}(P) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A - x \cdot I_n) = \frac{1}{\mathrm{Det}(P)} \cdot \mathrm{Det}(B - x \cdot I_n) \cdot \mathrm{Det}(P) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Det}(A - x \cdot I_n) = \mathrm{Det}(B - x \cdot I_n) \end{aligned}$$

Théorème 2:
La trace d'une matrice A est égale à la somme de ses valeurs propres et le déterminant d'un matrice A au produit de ses valeurs propres.

Exemple:(on reprend les matrices de l'exemple 2.1)
1) $\text{Tra}(A) = 1 + 4 = 5 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} + \frac{5-\sqrt{33}}{2}$
$\text{Det}(A) = 4 - 6 = -2 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{33}}{2}$

2) $\text{Tra}(B) = 1 + 4 + 5 = 10 = (-0.6769) + (-1.2397) + 11.9166$
$\text{Det}(A) = 10 = (-0.6769) \cdot (-1.2397) \cdot 11.9166$

Théorème 3 (Cayley-Hamilton):
Soit A une matrice carré de taille n et $P(x)$ sont polynôme caractéristique, alors $P(A) = 0_{M_n}$ Ce théorème est très utile pour trouver des puissances de A et son inverse. Regardons par exemple la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
On sait que son polynôme caractéristique est $P(x) = x^2 - 5x - 2$.
Ainsi on a:

$$\begin{aligned} & A^2 - 5 \cdot A - 2 \cdot I_2 = 0 \\ \Leftrightarrow & A^2 = 5 \cdot A + 2 \cdot I_2 \\ & \text{et} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \cdot A \cdot (A - 5) = \cdot I_n \\ \Leftrightarrow & A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A - 5) \end{aligned}$$

C'est bien beau mais la démo est pas si simple, il en existe pas mal franchement pas très belle, je vous en propose une.

Preuve:
Nous allons utiliser pour cette preuve le complémentaire de matrice noté Comp(A) complémentaire de A. Je ne vais pas expliquer ce que c'est car j'ai une vie et des bouches à nourrir mais il faut retenir ça:

1. Toute matrice carré à un complémentaire
2. $A \cdot \text{Comp}(A) = \text{Comp}(A) \cdot A = \text{Det}(A) \cdot I_n$

Notons $\text{Comp}(A - x \cdot I_n) = \sum_{j=0}^{n-1} B_j \cdot x^i$ avec B_i des matrices carré de taille n.
On a

$$\begin{aligned} (A - x \cdot I_n) \cdot \text{Comp}(A - x \cdot I_n) &= A(\sum_{j=0}^{n-1} B_j \cdot x^j) - x(\sum_{j=0}^{n-1} B_j \cdot x^j) \\ &= -B_{n-1}x^n + (\sum_{j=1}^{n-1} x^j \cdot (AB_j - B_{j-1})) + AB_0 \end{aligned} \tag{1}$$

De plus d'après la définition du complémentaire, on a

$$
\begin{aligned}
(A - x\cdot I_n)\cdot \mathrm{Comp}(A - x\cdot I_n) &= \mathrm{Det}(A - x\cdot I_n)\cdot I_n \\
&= P(x)\cdot I_n = \sum_{j=0}^{n} p_j x^j I_n
\end{aligned} \tag{2}
$$

Les équations 1 et 2 étant égale pour tout n, on a par télescopage : $\begin{cases} p_j I_n = AB_j - B_{j-1} \\ p_0 I_n = AB_0 \\ p_n I_n = -B_{n-1} \end{cases}$

Ainsi

$$
\begin{aligned}
P(A) &= -B_{n-1}A^n + (\sum_{j=1}^{n-1} A^j\cdot(AB_j - B_{j-1})) + AB_0 \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} A^{j+1}B_j - \sum_{j=1}^{n} A^j B_{j-1} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\square$

3 Diagonalisation (dur à dire)

On dit que A est diagonalisable si il existe un matrice P inversible tel que PAP^{-1} est une matrice diagonale.
On sait tous l'intérêt merveilleux des matrices diagonales mais toute matrice n'étant pas diagonalisable, il nous faut un moyen de savoir si un matrice l'est ou pas.

3.1 Thérorème:

Soit A une matrice carré de taille n, si A admet n valeurs propre différentes $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$, on a:

1. A est diagonalisable
2. Si l'on nomme P ayant comme colonne les vecteurs $\{X_1, ...X_n\}$ avec X_i un vecteur propre associé à la valeur propre λ_i, $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale de forme $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$

Preuve:
Nous savons que $\{X_1, ..., X_n\}$ est libre, c'est donc une base de K^n, P est donc

bien inversible. Notons Y_i la matrice colonne de taille $n \times 0$ et de coefficient $a_{j,0} = 0$ si $i \neq j$, et $a_{j,0} = 1$ si $i = j$.
Soit M un matrice, MY_i est la i-ème colonne de la matrice M.

$$\begin{aligned} DY_i &= (P^{-1}AP)Y_i \\ &= P^{-1}AX_i \\ &= \lambda_i P^{-1}X_i \\ &= \lambda_i Y_i \end{aligned}$$

On a bien une matrice diagonale de forme (voir en haut mdr).