Ebauche d'un commentaire et de quelques explications sur *Sur les hypothèses fondamentales de la géométrie* de Poincaré, 1887.

Le développement des mathématiques est à croissance exponentielle, chaque siècle (voire même chaque décénnie) est plus dense (depuis peu) que le(/la) dernier(/dernière).
L'histoire des Mathématiques du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, allant constituer une maigre mise en contexte, est bien trop riche, je ne vais donc ne parler que de quelques grands traits et me focaliser ensuite sur le développement de la géométrie.
"Le XIX$^{\text{ème}}$ siècle vit apparaître plusieurs théories nouvelles et l'accomplissement des travaux entrepris au siècle précédent. Le siècle est dominé par la question de la rigueur. Celle-ci se manifeste en analyse avec Cauchy (bien qu'il ait réussi à démontrer des théorèmes faux et qu'aujourd'hui il n'est à peine plus rigoureux qu'un élève de fin seconde voire première scientifique). Elle ré-apparaît également à propos de la géométrie". Pour la suite du paragraphe, cf la page Wikipedia "Histoire des mathématiques" à l'index "XIX$^{\text{ème}}$ siècle". Parmi les grands hommes de ce siècle on peut, évidemment, citer Poincaré, Gauss et Riemann. Parmi les grandes femmes de ce siècle, malheureusement bien moins connues que leurs homologues, on peut citer Sophie Germain, Ada Lovelace et Sofia Kovaleskaïa.
Le siècle débute par *l'invention* de la géométrie descriptive par Gaspard Monge, la résolution de grands problèmes grecs par la négative : trisection de l'angle, quadrature du cercle et la duplication du cube. Comme on le verra, la place du cinquième postulat d'Euclide et le développement (les prémisses) des géométries riemanniennes.

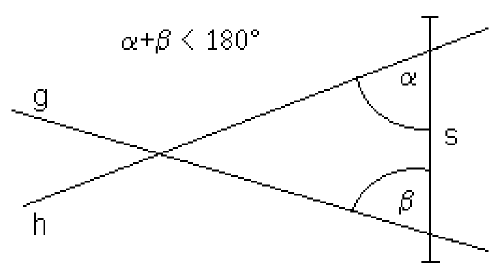
Note : Je vais mettre un coup de fluorescent sur chaque point sur lequel je me serai attardé.

Sans doute que tu l'as remarqué, mais ce papier n'a pas été rédigé par n'importe qui. "Rien de moins" que l'illustre Poincaré. Il est considéré comme le dernier des universalistes, le dernier mathématicien de à avoir contribué à toutes les branches mathématiques de son temps. Qui plus est, il en a créé quelques une, dont l'Analysis Situs (aujourd'hui, renommée en Géométrie Algébrique) et la Topologie.
Afin que tu te rendes pleinement compte de l'importance de cet homme, voici le faire-part de la famille Poincaré annonçant la mort du scientifique :

"Henri Poincaré, membre de l'Académie française et de l'Académie des sciences, membre du Bureau des longitudes, inspecteur général des Mines, professeur à la faculté des sciences, professeur honoraire à l'Ecole polytechnique, membre du conseil des Observatoires de province, membre associé de l'Académie de Stanislas, à Nancy, membre étranger de la Société royale de Londres, de l'Académie des Lincei, des Académies de Stockholm, de Copenhague, de Budapest, de Gottingue, d'Uppsala, de Bucarest, etc., membre honoraire étranger des Académies de Vienne, d'Edimbourg, de Dublin, etc., membre associé des Académies de Bruxelles, de Washington, etc., membre correspondant des Académies de Berlin, de Saint-Pétersbourg, d'Amsterdam, de Munich, etc., commandeur de la Légion d'honneur, officier de l'Instruction publique, chevalier de l'Etoile polaire de Suède."

page 203

[1] Postulatum d'Euclide : l'axiome des parallèles.
"Si une droite coupe deux autres droites en déterminant deux angles internes dont la somme est différente de deux angles droits, alors les deux droites se coupent dans le demi-plan pour lequel la somme est inférieure à deux angles droits."



On remarque que si $\alpha + \beta = 180$[deg] alors $(g)//(h)$.

On verra par la suite que cet axiome a joué un rôle de premier plan dans les développements de la géométrie et plus encore.

page 204

[2] "La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre."
(A noter que ce n'est pas nécessairement vrai, par exemple pour des géométries hyperboliques (de Lobatchevsky) ou elliptiques/sphériques (de Riemann), plus conjecture de la géométrisation de Thurston.)

Démonstration :
Soit un espace métrique (E, d). L'inégalité triangulaire est définie telle que :

$$\forall (a, b, c) \in E^3,\ \mathrm{d}(a, b) \leq \mathrm{d}(a, c) + \mathrm{d}(c, b) \tag{1}$$

(Note : Soient deux points X et Y, $\mathrm{d}(X, Y)$ représente la distance entre ces deux points, dit de manière vulgarisée.)
$\mathrm{d}(a, c)+$ $\mathrm{d}(c, b)$ est minimisé lorsqu'il est égal à $\mathrm{d}(a, b)$. On remarque donc trivialement que l'égalité n'est vérifiée que lorsque les points de l'espace E (sous-espace euclidien) sont alignés et que c appartient au segment d'extrémités a et b. [On remarquera également que l'ensemble E, engendrant l'espace métrique, doit satisfaire quelques conditions, mises ici de côtés.]
Il y a une autre démonstration, que je ne connaissais pas, plus physique :
En appliquant le principe de moindre action à un système qui évolue dans une géométrie euclidienne (où le théorème de Pythagore s'applique). [Typiquement l'espace dans lequel nous vivons n'est pas euclidien.]

Plus généralement : Derrière l'idée de chemin de longueur minimale (ce n'était, d'ailleurs, pas anodin qu'au paragraphe précédent j'écrive "minimisé", minimisation de la distance) se cache l'idée de <u>géodésiques</u>. Ca devient, à la fois, tout de suite plus intéressant mais également plus complexe.
Equation générale des géodésiques :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0 \tag{2}$$

où $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \equiv \dfrac{\partial x^\mu}{\partial \zeta^\sigma} \dfrac{\partial^2 \zeta^\sigma}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}$ (cf connexion affine, géométrie différentielle).

Ici on a l'équation des plus courts chemins sur des surfaces courbées (donc primordial en, par exemple, relativité générale). De plus, le système de coordonnées est ici quelconque.

("Fun fact" : La gravitation est due à la courbure de l'espace-temps, ce n'est pas une force mais le "résultat"/"l'émanation" d'une force, la *représentation* somme tout. C'est ce que disent nos modèles contemporains, on trouvera très certainement mieux demain.)

page 205

[3] Si je ne me trompe pas, on appelle surface du second ordre quelconque toute surface de l'espace euclidien de dimension 3.

Plus généralement, une quadrique de dimension 3 ou plus correspond à l'espace engendré par $\sum \mathrm{P}_2[X, Y, \dots] = 0$ (exemple : $x^2 - 2py = 0$ génère le cylindre parabolique) ou aux variétés : “un espace qui est modelé sur l'espace euclidien, lui ressemblant localement”. Je ne peux pas t'en dire plus sur la notion de variété (en anglais *manifold* et *variety*). J'ai du mal à me l'expliquer tout d'abord à moi même, je suis loin, très, loin d'être au point en topologie et géométrie différentielle. Je t'invite donc à faire des recherches si tu souhaites en savoir plus.

Un théorème cool, tant que nous sommes dans des histoires de topologie : la classification des surfaces fermées.
Ce théorème énonce que toute surface fermée et connectée est homéomorphe (continûment déformable par une application f, par exemple : en topologie, une sphère et un cube, c'est la même chose, on peut continûment déformer un cube afin d'obtenir une sphère (et inversement), ils sont donc homéomorphes) à un membre de ces trois familles :

* la sphère ;
* les sommes connexes (“coller” deux surfaces, les “relier”, par une surface sur la surface commune, pour qu'elles n'en forment plus qu'une) de tore pour un nombre de anse supérieur ou égal à 1 ;
* la somme connexe de plan projectif pour $k \geq 1$.

Revenons aux surfaces du second ordre, dont voici l'équation générale :

$$Az^2 + A'y^2 + A''x^2 + Byz + B'xz + B''xy + Cz + C'y + C''x + F = 0 \quad (3)$$

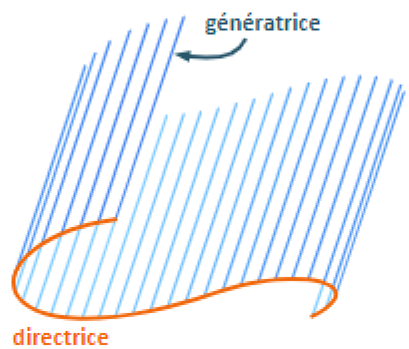
avec “x et y rectangulaire” (de façon moderne, je pense que ça signifie que x et y forment un repère orthogonal, ou plus algébriquement $x^{\perp} \cdot y$ (c'est le “perp dot product”, à noter qu'il doit satisfaire deux conditions, ici omises).

En complément, une courbe du second ordre correspond à une section conique.

J'ai trouvé quelques unes de ces informations dans l'ouvrage : “Traité analytique des courbes et des surfaces du second degré” de Jean-batiste Biot. Il y a énormément de choses à dire sur ces structures, de plus, il semblerait que ce Jean-Batiste Biot était vraiment le spécialiste du domaine. Tu sauras donc où chercher si cela t'intéresse.

Je dois tout de même t'avouer que je suis resté bloqué quelques minutes devant les définitions de droites et de circonférences. Mais il n'est pas “nécessairement nécessaire” de tout comprendre afin d’apprécier le texte.

[4] Avant de définir ce qu’est une génératrice rectiligne, définissons tout d’abord ce qu’est une génératrice.
C’est une droite dont le déplacement suivant une ligne simple, appelée directrice, engendre une surface.



(La notion de surface s’avère finalement très englobante et abstraite. Et ce n’est que le début !)
Donc, par extension, une génératrice rectiligne devrait être une génératrice où la directrice est une droite rectiligne.
Je suppose que l’on peut faire une analogie entre la représentation de la génératrice du cylindre (où la directrice est un lacet) et celle du fibré trivial des fibrés en droites sur le cercle). (Si $\mathcal{M}$ est une variété, alors $E = \mathcal{M} \times \mathbb{R}^r$, considéré comme la projection $\pi : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^r \to \mathcal{M}$ sur la première coordonnée, est un fibré vectoriel de rang r, dit fibré trivial.
La traduction peut être approximative car je la fais depuis un manuel de Géométrie Différentielle italien, en suivant le principe de traduction de Chateaubriand.)

[5] Le rapport anharmonique (, ou birapport) se défini tel que :
Soient quatre points, alignés dans l’espace euclidien, A, B, C et D alors :

$$b(A, B, C, D) = \frac{\|\mathrm{AC}\| \cdot \|\mathrm{BD}\|}{\|\mathrm{BC}\| \cdot \|\mathrm{AD}\|} \tag{4}$$

où $\|XY\|$ désigne la distance entre X et Y sur le plan euclidien.

Note : Je ne sais pas si tu te rends compte de la puissance des mathématiques, non, Mathématiques. Combiner ainsi de tels concepts, d'une aussi harmonieuse et surprenante manière.
Les choses semblent sortir de nulle part et n'avoir aucun lien, c'est ça (une) des beautés des Mathématiques : retrouver l'usage des complexes, des logarithmes, de l'algèbre, du birapport et bien plus encore à un endroit tel de la géométrie.
Trouver ce type de lien mystérieux, presque mystique voir même ésotérique (au début), est devenu un graal depuis ces dernières années (même si je pense que Hilbert en a peut-être donné l'impulsion). On peut penser à Peter Scholze (concepteur des espaces perfectoïdes et médaillé Fields 2018), Grisha (Grigori) Perelman (a utilisé la conjecture de la géométrisation de Thurston et le flot de Ricci ($\partial_t g = -2\text{Ricci}(g)$, le facteur 2 est certaines fois réduit à 1, équation introduite par Hamilton) afin de résoudre , par extension, la conjecture de Poincaré, à noter que dans ses trois papiers, il n'emploie jamais l'expression "conjecture de Poincaré") et la liste est encore très, très, longue.

[6] Je t'invite à aller voir à quoi ressemble un hyperboloïde à une nappe, je n'ose même pas rien qu'essayer de le représenter manuellement. Son équation cartésienne est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \geq b \tag{5}$$

On remarque que c'est une surface de dimension 3.

page 206

[7] Je pense que par surface fondamentale, il doit être compris : la seconde forme fondamentale (étant la dérivée de l'application de Gauss).

[8] Un cas dégénéré "peut consister en un objet dont la définition fait apparaître des éléments redondants ou superflus. Il peut aussi être vu comme un cas particulier d'une construction générale, ne satisfaisant pas certaines propriétés génériques, notamment si ces cas sont rares, en un sens topologique ou en théorie de la mesure."

Par exemple, un segment est dégénéré lorsque ses extrémités sont identiques, et se réduit alors à un point.

[9] Concernant le dernier paragraphe de la page 206 :
Les mathématiques peuvent représenter, par excellence, l'art de remettre en question des conceptions quelconques (l'autorité par exemple (avec Alain Connes)). On pourra penser à l'apport de Gödel par ses théorèmes d'incomplétude ayant littéralement remis en question certains fondements même de la pensée (logique), apportant une nouvelle dimension d'expression du subconscient, simplifiant et complexifiant, questionnant et expliquant un monde et ses éléménts, celui des Mathématiques.

Alain Connes, suite à une proposition de son professeur de mathématiques (de seconde ou première) concernant une formule permettant de donner le nombre de nombre premier inférieur à n qui n'existerait pas (selon les dires de l'enseignant), non content de "l'assertion" (en réalité fausse) du professeur, le lendemain, après avoir réfuter les propos de son enseignant en lui montrant une formule permettant de dénombre le nombre de nombre premier plus petit que n, il dira, lors d'une interview :
"J'avais franchi un grand pas, qui est un pas essentiel pour le jeune mathématicien et ce pas essentiel c'est de ne croire qu'en soi-même. C'est à dire, de ne pas donner du crédit à l'autorité. Et ça c'est extrêmement important. Et je pense que les mathématiques sont un sujet dans lequel c'est possible. Ce serait beaucoup plus difficile en chimie, en histoire, etc. Parce que (là), la connaissance joue un rôle absolument essentiel."
(Si j'ai mis le "là" entre parenthèses, c'est que je ne suis pas entièrement d'accord, sur ce point, avec Alain Connes. La connaissance joue un rôle également important en chimie et surtout en histoire. Mais soit.)
Toujours d'Alain Connes :
"Une des conditions essentielles dans le parcours d'un mathématicien c'est d'arriver à se remettre soi-même en question."

De la même manière, dans une idée de soulèvement contre l'autorité, on peut penser aux mathématiciens et scientifiques soviétiques, ayant décider de s'insurger, qui ont désertés la Russie sous domination de l'URSS. Comme par exemple : Gromov.

page 207

[10] En théorie de l'homotopie, on peut penser, par analogie, à la notion

d'invariant caractéristique. Et en théorie des groupes, on dit qu'un sous groupe est caractéristique s'il est invariant par tout automorphisme.

("La conjugaison complexe est un automorphisme de corps.")

page 208

[11] Concernant les groupes continus, d'ordre 3, j'ai besoin de faire des recherches sur ce point, car, aux vues des définitions, j'ai du mal à comprendre comment un groupe peut à la fois être continu et d'ordre 3.
Tout ce que je peux présentement dire, c'est que le groupe des translations est continu et abélien (commutatif).

[12] Par "opération identique", je pense que Poincaré désigne l'opération identité, constituant donc apparemment un néologisme. De plus, il est ensuite dit que, pour certaines valeurs de α, β et γ, on devra avoir :

$$\varphi = x \text{ et } \Psi = y \tag{6}$$

Raison de plus de penser que c'est l'opérateur identité, étant défini tel que :

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{X}} \;:\; \begin{array}{ccc} \mathrm{X} & \to & \mathrm{X} \\ x & \mapsto & x \end{array} \tag{7}$$

[13] Je pense que c'est de nouveau un néologisme (encore un ! faut aussi dire que les Mathématiques ont bien évoluées depuis la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle) :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha}\right|_{\alpha=0} \Longrightarrow \varphi'(\alpha = 0) \tag{8}$$

C'est à dire, le cacul de la dérivée où α vaut 0 et les autres variables restent fixées.

[14] Je soupçonne une erreur lors de la réécriture ou de la numérisation du document, car il est écrit :

$$+q\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\gamma} \text{ hors, ce devrait être } +q\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\beta} \tag{9}$$

Car on sait que :

$$S = p\Big(\alpha\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha} + \beta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta} + \gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\gamma}\Big) + q\Big(\alpha\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\alpha} + \beta\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\beta} + \gamma\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\gamma}\Big) \tag{10}$$

De plus, on sait qu'en choisissant A, B et C, on aura :

$$\mathrm{S} = \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B} + \gamma\mathrm{C} \tag{11}$$

Posons :
$\mathrm{A} = p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha} + q\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\alpha}$, $\mathrm{B'} = p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta} + q\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\gamma}$ et $\mathrm{C} = p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\gamma} + q\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\gamma}$.
Alors :

$$S \neq \alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B'} + \gamma\mathrm{C} \tag{12}$$

$$\alpha\mathrm{A} + \beta\mathrm{B'} + \gamma\mathrm{C} = p\Big(\alpha\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\alpha} + \beta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta} + \gamma\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\gamma}\Big) + q\Big(\alpha\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\alpha} + \beta\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\gamma} + \gamma\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\gamma}\Big) \tag{13}$$

On remarque donc aisément que B doit être égal à :

$$\mathrm{B} = p\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\beta} + q\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}\beta} \tag{14}$$

page 209

[15] J'avoue avoir été très étonné de retrouver le crochet de Poisson ici (je suis tout d'abord étonné de ne rien qu'y avoir pensé, à ce propos Poincaré a écrit quelque chose de très intéressant : le fameux épisode du marchepied, sans compter ses articles dans des revues métaphysiques), défini tel que :

$$\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\} = \sum_{i=1}^{N}\Big[\frac{\partial \mathrm{A}}{\partial q_i}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathrm{A}}{\partial p_i}\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial q_i}\Big] \tag{15}$$

On remarque trivialement que $N = 2$ dans la formule donnée par Sophus Lie.

J'ai été particulièrement étonné, car le crochet de Poisson est un opérateur agissant sur un système physique et (normalement) aucunement dans ce contexte. Même si, on peut remarquer que x et y désigne un système de coordonnées quelconque, créant un rapport direct explicite avec le crochet de Poisson. La fameuse beauté des mathématiques.

"Les antipodes se rencontrent et se confondent."

[16] Sans entrer dans des détails de théories des groupes et algébriques, un exemple me semble amplement suffisant :
une combinaison linéaire de x et de y est $ax+by$, où a et b sont des constantes (merci Wikipedia pour l'exemple).

Par ailleurs, soit une équation différentielle linéaire E, et soit f et g deux solutions de E. Alors, par principe de combinaison linéaire, $\alpha f + \beta g$ sont également des solutions, pour tout α et β appartenant à $\mathbb{R}$ (d'abord, souvent ôté de 0).

Je pense que ça peut (sans doute) se généraliser à tout opérateur linéaire, mais c'est à vérifier, démontrer.

De plus, tu dois savoir que, pour une fonction f intégrable :

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x) + C \tag{16}$$

$1 \cdot \mathrm{F}(x) + \beta \cdot C$ représente sans doute (lien à mettre en évidence afin de le prouver, opérateur intégral linéaire) un cas particulier de combinaison linéaire, combinaison linéaire de la primitive de $f(x)$ et de la constante d'intégration, où α dans $\alpha \cdot \mathrm{F}(x) + \beta \cdot C$ est fixé à 1.
Mais je vais peut-être un peu loin, quoique, qui sait.

De plus (une fois n'est pas coutume, toujours des "de plus"), j'ai eu pu suivre le cours d'une université de Paris sur une introduction à la mécanique quantique et l'enseignant-chercheur a expliqué pourquoi, finalement, il était plus convenable d'appeler le principe de superposition quantique : le principe de combinaison quantique (ce que font certains anglophones). Algébriquement, il est plus "juste" de préferer le mot *combinaison* à *superposition.* Et la mécanique quantique c'est beaucoup d'algèbre linéaire.

[17] Je n'ai pas essayé de démontrer les expressions suivantes (peut être une erreur de ma part, j'rigole) :

$$\alpha\beta[\mathrm{A},\, \mathrm{B}] = (\alpha\mathrm{A})(\beta\mathrm{B})(\alpha\mathrm{A})^{-1}(\beta\mathrm{B})^{-1} \tag{17}$$

et

$$
\begin{cases}
[\mathrm{A},\, \mathrm{B}] = \lambda \mathrm{A} + \mu \mathrm{B} + \nu \mathrm{C} \\
[\mathrm{A},\, \mathrm{C}] = \lambda' \mathrm{A} + \mu' \mathrm{B} + \nu' \mathrm{C} \\
[\mathrm{B},\, \mathrm{C}] = \lambda'' \mathrm{A} + \mu'' \mathrm{B} + \nu'' \mathrm{C}
\end{cases} \tag{18}
$$

car elles me semblent triviales, si tu veux que je le fasse n'hésite pas.

Je n'ai pas, non plus, fait le calcul de :

$$
[\mathrm{A}, [\mathrm{B}, \mathrm{C}]] + [\mathrm{B}, [\mathrm{C}, \mathrm{A}]] + [\mathrm{C}, [\mathrm{A}, \mathrm{B}]] = 0 \tag{19}
$$

il est simplement long, mais ne semble pas nécessairement compliqué. Cette relation s'appelle la relation de Jacobi sur les crochets de Lie.

page 210

[18] Par "que A se réduise à p" est sous entendu que A ne dépende plus que de p, qu'il en soit la seule variable.
On vérifie aisément que :

$$
[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}x} = \mu \mathrm{B} \tag{20}
$$

[19] La solution standard/générique de :

$$
\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{d}x} = \mu \mathrm{B} \tag{21}
$$

est $B = c \exp(\mu x)$, avec c à déterminer.

Ici $c = h\theta_1(y) + q\theta_2(y)$ Je n'en sais pas suffisemment sur les équation différentielles, qui plus est de plusieurs variables, pour savoir comment est ce que l'on détermine c par le calcul. Mais il semble évident que c sera tel que les autres variables soient ainsi compensées devant $\exp(\mu x)$, vérifiant ainsi l'égalité.

page 211

[20] N'est-ce point donc là étonnant et hallucinant ? A la manière d'Euclide, faire une hypothèse sans la faire. Il aura fallu près de deux millénaires

pour se rendre compte de cela. Impressionnant, étonnant, halluciant. Va savoir ce que réserve l'avenir.

page 212

[21] En faisant abstraction des propos de Poincaré sur les géométries et donc du contexte, c'est un résultat trivial, mais la démonstration l'est bien moins. Tout comme par exemple la démonstration de la commutativité de l'addition sur $\mathbb{R}$: $a+b=b+a, (a,b)\in\mathbb{R}^2$ (nécessitant les axiomes de Peano, donc démonstration sur $\mathbb{N}$, un passage sur $\mathbb{Q}$ pour enfin pouvoir arriver à $\mathbb{R}$, sous oublier tout un tas de démonstrations sous-jacentes à celle de la commutativité de l'addition, par exemple que le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ est possible).

page 214

[22] Le "que" de la proposition D est très important, je te renvoie vers la page 206 : "La distance de deux points situés sur une même génératrice rectiligne de la surface fondamentale est nulle."

[23] Je te renvoie vers le numéro 2 page 206, entre autre, et plus généralement en plus des géométries sphériques, je ne serai pas étonné de voir toute surface fermée, sous certaines conditions.

[24] Concernant le mémoire de Riemann, c'est clairement la référence. D'ailleurs son contenu peut nous renseigner sur le pourquoi parle-t'on de géométrie riemannienne pour désigner toute géométrie non euclidienne (pour faire court). Je ne peux pas vraiment t'en dire plus, je ne l'ai pas lu, et je doute pouvoir le faire en allemand, à moins de nombreux efforts. Je vais donc le faire. Afin d'appuyer sur le fait que ce soit une référence incontestable, il l'est tout comme, dans leur domaine, les *Cinq leçons de Psychanalyse* de Freud, le *Old & New* de Cédric Villani, la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier, *Noncommutative geometry* d'Alain Connes, *Principia Mathematica* de Russel et Whitehead ou encore *Philosophiae naturalis principia mathematica* de Newton. (Pour ne citer qu'eux, j'aurais d'ailleurs pu aller jusqu'à citer la *Bible*, le *Coran*[...], cela aurait sans doute été excessif, qui plus est religion et Sciences ont "du mal" (un peu plus quand même) à s'homogénéiser, ce qui est finalement scientifiquement et (peut-être) religieusement une bonne chose.)

Il est également à noter que le mémoire de Riemann ne contient que relativement peu de formules mathématiques et est particulièrement court. A mes yeux, il définirait peut-etre implicitement un courant de pensée, une idéologie (phénomène très en vogue, surtout au XIX$^{\text{ème}}$ siècle, je viens d'ailleurs d'apprendre à l'instant que Marx avait un penchant pour les mathématiques et a même laissé des manuscrits sur la compréhension des fondements du calcul infinitésimal), mais je vais avoir besoin de le lire pour m'en assurer ou bien réfuter.

page 215

[25] C'est dans ce type de moment que l'on peut percevoir tout le génie de Poincaré (même si, ici, il y est allé gentiment). (Encore une fois,) Je trouve que ses écrits regorgent de sens cachés et de coups de théâtre.

Dans la même phrase il a mis en avant un isomoprhisme (considérable), développer (implicitement) les mathématiques modernes de son temps et, sous une moindre mesure, un présage aux travaux de Gödel. Sans oublier la notion de relativité (dont, rappelons que, 18 années plus tard il en sera le père, partagé avec Einstein et Lorentz (bein que quelques polémiques existent) (et moindrement d'autres grands scientifiques de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle)), et la différence fondamentale vérité-réalité (intrinsèquement liée à la notion de relativité, par ailleurs).

page 216

[2]6 Près de cent-trente années plus tard, on peut se rendre compte que poincaré a eu terriblement raison. Peut-on aller jusqu'à parler de visionnaire ? Aha.

J'espère sincérement ne pas (trop ?) avoir fait d'erreur, j'ai rédigé ça d'une traite en sept heures, mais j'ai l'impression que ça n'a duré, qu'au plus, une demi-heure. J'espère, de plus, que tu auras apprécié ce ptit geste, en tout cas j'ai adoré rédiger cela. J'espère, finalement, que cela aura attisé ta curiosité.

Si tu as la moindre question, n'hésite pas.
J'ai, d'ailleurs, après mûres réflexions, préférer choisir un texte en français et surtout court (afin que la longueur ne dégoûte pas).

Avant de clore ce modeste “papier”, je souhaite faire quelques ouvertures.

Poincaré a eu un impact considérable sur le jeune Einstein (avant même 1905, la théorie de la relativité restreinte), Albert Einstein et ses amis avaient, apparemment, pris pour habitude de se réunir hebdomadairement et de débattre sur des textes scientifiques et philosophiques. C'est là qu'Einstein a pris connaissance de Poincaré et ses écrits.

La théorie de Galois.

Si tu as la moindre proposition, je suis preneur.

Pour l'anecdote, j'ai utilisé dix fois "De plus" (en comptant celui-ci).