

## Exponentielle d'une matrice

L'exponentielle (réelle) possède bon nombre de caractéristiques qui la rendent intéressante (bijection réciproque du logarithme népérien, équation fonctionnelle, dérivation, solution d'équations différentielles ordinaires, théorie de Fourier, trigonométrie...). Rien n'empêche alors de supputer qu'elle puisse être également particulièrement utile en algèbre (linéaire). Mais alors, comment la définir ? Parallèlement et de manière symétrique à ce que l'on peut faire en analyse réelle, on est particulièrement tenté de définir l'exponentielle d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ , avec  $\mathbf{k}$  égal à  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ , comme une série entière :

$$(1) \quad \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Sans surprise cette définition ne contredit pas le cas où  $A$  est un scalaire (cad.,  $A \in \mathcal{M}_1(\mathbf{k}) = \mathbf{k}$ ). On s'attend de plus à ce que nombre de résultats vrais sur  $k$  possèdent un équivalent sur  $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ .

L'un des résultats les plus évidents tient à la convergence : quand peut-on calculer l'exponentielle d'une matrice (sous-entendu obtenir une matrice à coefficients tous finis) ? Remarquons que se ramener à une étude de la convergence normale de l'exponentielle d'une matrice revient à se battre avec une fonction que l'on connaît bien : l'exponentielle usuelle. En effet, si l'on dispose d'une norme  $\|\cdot\|$  pour laquelle l'inégalité suivante est vraie :

$$(2) \quad \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{1}{k!} \|A\|^k$$

alors la convergence normale serait assurée (notons que l'équivalence des normes joue en notre faveur en dimension finie). En effet, en sommant ensuite sur l'ensemble des valeurs entières  $k$ , on obtient la convergence normale (uniforme et simple) de l'exponentielle d'une matrice et même la continuité de l'application étudiée. On a d'ailleurs montré que  $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$  :

$$(3) \quad \|\exp(A)\| = \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|).$$

Dans cette note explicative, on ne s'attarde pas trop sur l'existence et le pourquoi du comment de la norme sous-multiplicative  $\|\cdot\|$ . On renvoie au Gourdon, *Algèbre – Topologie sur les endomorphismes* pour quelques précisions mais l'on réserve une note future à l'étude de ces objets.

Bien que nous sachions possible le calcul de l'exponentielle d'une matrice, il n'est absolument pas évident de le mener en pratique. Dans certains cas particuliers, on peut se débrouiller sans faire preuve de beaucoup d'astuce. Par exemple dans le cas d'une matrice nilpotente  $A$ , l'exponentielle est une somme finie et *a fortiori* un polynôme en  $A$ . Plus généralement un résultat similaire existe pour une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ .

**Théorème 1.** *Pour toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ , il existe un polynôme  $P_A$  à coefficients dans  $\mathbf{k}$  tel que  $\exp(A) = P_A(A)$ .*

Ce théorème nous permet d'affirmer que  $A$  et  $\exp(A)$  commutent ensemble :

$$(4) \quad A \exp(A) = \exp(A) A.$$

De manière plus générale, lorsque l'on étudie la conservation (ou non) de certaines propriétés on se rend compte que la commutativité peut entrer un jeu. Un exemple flagrant se trouve

dans l'équation fonctionnelle. Nous sommes, chez nos amis complexes et réels, bien habitués au résultat suivant  $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ , avec  $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}$ .

On peut, par exemple, prouver un résultat similaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$ .

**Théorème 2.** *Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$  qui commutent. Alors,*

$$(5) \quad \exp(A + B) = \exp(A) \exp(B) = \exp(B) \exp(A).$$

*Démonstration.* On commence en établissant une preuve classique. Ensuite, on introduira un schéma de preuve qui tient trait pour trait des idées que l'on retrouvera en théorie de Lie (on se réfère à la [preuve du théorème I.4](#)).

On ne traite que l'égalité  $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ , la seconde égalité se traite identiquement. Commençons par rappeler les forces en présence :

$$(6) \quad \exp(A) \exp(B) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right).$$

Comme les séries sont normalement convergentes, on en prend le produit de Cauchy :

$$(7) \quad \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k, \text{ avec } c_k = \sum_{p=0}^k \frac{A^p}{p!} \frac{B^{k-p}}{(k-p)!}.$$

On remarque que  $\frac{1}{k!} \binom{k}{p} = \frac{1}{p!(k-p)!}$ . De ce fait :

$$(8) \quad c_k = \frac{1}{k!} \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} A^p B^{k-p}.$$

Comme  $A$  et  $B$  commutent, on reconnaît la formule du binôme de Newton. On conclut que :

$$(9) \quad \exp(A) \exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A + B)^k = \exp(A + B).$$

Une autre preuve, aux idées plus profondes peut être proposée. On va suivre le [document précédemment cité](#). □

Cette seconde preuve nous amènera à donner une nouvelle définition de l'exponentielle. Nous définirons, dans une autre note explicative, ce que peut être l'application exponentielle entre une algèbre et un groupe de Lie. Le cas des groupes de Lie matriciels est particulièrement satisfaisant puisque la définition coïncide avec l'exponentielle de matrice que nous considérons ici.

Revenons à nos problèmes actuels, peut-on espérer une formule dans le cas où  $A$  et  $B$  ne commutent pas forcément entre eux ? On pointe seulement l'existence de la formule BCH (Baker-Campbell-Hausdorff).

**Proposition 3** (cf. Neeb-Hilgert). *Soient  $X$  et  $Y$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$  telles que leur norme soit strictement inférieure à  $\frac{1}{2} \log(2 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ . On pose  $\Psi(z) = \frac{1 - e^{-z}}{z}$  avec  $z$  un nombre complexe. Alors :*

$$(10) \quad \log(\exp(X) \exp(Y)) = X + \int_0^1 \Psi(\exp(\text{ad}X) \exp(\text{ad}Y)) Y dt.$$

avec l'opérateur adjoint à définir, de même pour le logarithme.

Concrètement, on trouve la formule suivante :

$$(11) \quad \exp(X) \exp(Y) = \exp \left( X + Y + \frac{1}{2} [X, Y] + \frac{1}{12} [X, [X, Y]] + \frac{1}{12} [Y, [Y, X]] + \dots \right)$$

où l'on utilise le commutateur  $[X, Y] = XY - YX$ .

Nous aurons tout le temps d'éclairer ces diverses notions dans un futur proche. Pour le moment, rappelons nous seulement qu'il convient de faire attention à l'ordre des termes!

Grâce au théorème 2, on peut prouver que l'élément  $\exp(A)$  est inversible. En effet, il suffit de prendre  $B = -A$  pour obtenir :

$$(12) \quad \text{Id} = \exp(0) = \exp(A + (-A)) = \exp(A) \exp(-A) = \exp(-A) \exp(A).$$

On a donc sans grande surprise (et nous en sommes contents puisque l'on retombe sur un résultat connu) :  $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$ . Continuons sur notre lancée et voyons un petit résultat amusant (qui ne nous surprendra guère).

Introduisons la fonction  $\mathbf{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  qui à  $t$  associe  $\exp(tA)$ . On peut montrer que c'est une application de classe  $C^\infty$  et en calculer la dérivée, qui vaut  $A \exp(tA)$ . Outre ses diverses propriétés "analytiques", l'exponentielle complexe se révèle bien utile dès que l'on pense réduction, diagonalisation et tout le tintouin! On sent que l'exponentielle va s'avérer utile en regardant les deux résultats suivants.

**Proposition 4.** *Soit  $A$  un élément de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{k})$  et  $P$  un élément de  $\text{GL}_n(\mathbf{k})$ . Alors :*

$$(13) \quad \exp(PAP^{-1}) = P \exp(A) P^{-1}.$$

La preuve ne pose aucun problème. On peut alors s'intéresser au cas particulier où l'exponentielle prend une matrice diagonale en argument.

**Proposition 5.** *Soit  $D = \text{Diag}(a_1, \dots, a_n)$  une matrice diagonale de taille  $n$ , alors*

$$(14) \quad \exp(D) = \text{Diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n}).$$

Dans la mesure où l'on sait calculer sans problème aucun la puissance d'une matrice diagonale, la preuve ne pose de nouveau aucun problème.

Peut-être est-il temps de voir nos premiers calculs d'exponentielle de matrices? Nous allons utiliser SageMath (*a free open-source mathematics software system*).

```
A_1 = Matrix([[1, 1], [1, 1]]); exp(A_1)
A_2 = Matrix([[0, -2*pi], [2*pi, 0]]); exp(A_2)
A_3 = Matrix([[1/e, pi], [-1, 1]]); exp(A_3)
```

On trouve :

$$(15) \quad \exp(A_1) = \begin{pmatrix} 1/2e^2 + 1/2 & 1/2e^2 - 1/2 \\ 1/2e^2 - 1/2 & 1/2e^2 + 1/2 \end{pmatrix}, \quad \exp(A_2) = \text{Id}, \quad \exp(A_3) = \text{horreur}$$

En règle générale, il faut s'attendre à tomber sur des horreurs... à moins que la vie soit (trop) bien faite et que l'on ait été mis sur une voie particulièrement plaisante! Par exemple, dans le livre de Hall on peut trouver le résultat suivant :

$$(16) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \exp(A) = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$