# Ensembles intégraux de cardinal infini

Decan de Chatouville R. Garnier M.

**Résumé**

Problème : *Un ensemble de points du plan est dit intégral si la distance entre deux quelconques des points de cet ensemble est un nombre entier. Quels sont les ensembles intégraux infinis ?*

Pour prouver que, **à isométrie près**, un ensemble de cardinal infini $X$ est intégral si et seulement si $X \subseteq \mathbb{Z}$ (proposition 11), on procède comme suit :

- dans un premier temps, on étudie les ensembles intégraux de cardinal fini et l'on construit ce que l'on appelle le polynôme intégral (définition 1). Le polynôme intégral illustre l'existence d'une correspondance entre l'ensemble des racines d'un polynôme et les ensembles intégraux de cardinal fini. On donne alors une manière de construire un ensemble intégral à quatre éléments (ainsi que quelques résultats subsidiaires). On explique par ailleurs pourquoi il est compliqué de construire explicitement des ensembles intégraux à cinq points ou plus ;
- dans un second temps, on généralise les constructions du cas fini au cas infini. On ramène le problème en cardinal infini à l'étude de tous les sous-ensembles à quatre éléments. On prouve dans la partie 2.3 le résultat désiré.

Nous présentons notre cheminement dans ce document. Pour respecter au mieux la règle des dix pages, une douzaine de propositions ont été mises de côté et une ouverture entière faisant office de généralisation n'est plus qu'esquissée (nous avons supprimé une quinzaine de pages).

## Table des matières

*À moins que ce soit expressément précisé (en particulier dans la partie 3), on se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ et l'on ne considère que la distance euclidienne.*

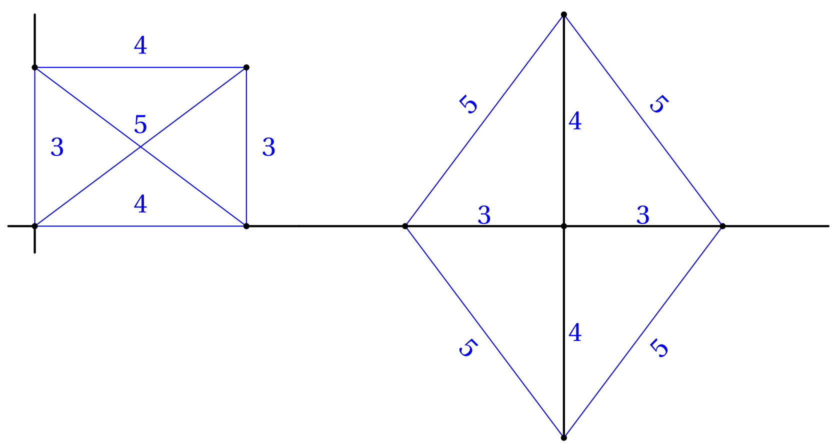
# 1 Cardinal fini et premières approches

Pour aborder un problème ouvert et complexe comme celui-ci, il est toujours bien de commencer par les cas plus simples desquels on pourra tirer des généralités et se familiariser avec le problème.

## 1.1 Exemples d'ensembles intégraux non triviaux

Avant d'attaquer le cas infini on va donc étudier quelques cas finis. Le cas le plus simple d'ensemble intégral de cardinal fini est un ensemble à un seul point. Ce cas n'est pas très intéressant car n'importe quel point du plan pris individuellement est intégral de manière évidente. Le prochain cas qui vient est celui d'un ensemble à deux points, là aussi il n'est pas intéressant : il suffit que les deux points soient à une distance entière l'un de l'autre. La situation commence à se complexifier à partir de trois points. Il y a alors deux configurations possibles : ou les points sont tous alignés et dans ce cas il suffit que les points soient à une distance entière de leurs plus proches voisins, ou les points forment un triangle non plat. On peut déjà remarquer que quelque soit le nombre de points de l'ensemble, il existe toujours une configuration où tous les points sont alignés et il suffit alors qu'ils soient tous à une distance entière de leur deux voisins les plus proches. On appellera cette configuration la **configuration triviale** de l'ensemble intégral.

Lorsque trois points ne sont pas alignés, on peut former un ensemble intégral très simplement : on forme un triangle rectangle dont les longueurs sont des triplets pythagoriciens. Dans le cas à quatre point, existe-t-il une configuration non triviale ? Oui, on la trouve en collant deux triangles rectangles comme le montre la figure à gauche. Pour le cas à 5 points, on trouve une configuration non triviale en mettant côte à côte 4 triangles identiques tous issus de triplets pythagoriciens comme le montre la figure à droite :




On peut maintenant se poser la question, existe-t-il toujours des ensembles intégraux de cardinal fini non triviaux ? On y répond par l'affirmative à la proposition 5.

*Dans les parties suivantes (correspondance, obstruction, classification), on associe à chaque ensemble intégral de cardinal fini un polynôme. On utilise alors une telle correspondance pour étudier certains ensembles intégraux et expliquer pourquoi il est compliqué de construire des ensembles intégraux non triviaux.*

## 1.2 Correspondance entre ensembles intégraux et racines de polynômes

Dans la mesure où il existe une bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$, on choisit de travailler sur $\mathbb{C}$.

Soit $E$ un ensemble intégral de cardinal fini égal à $n$, avec $n \in \mathbb{N}$. On note $e_i$ les $n$ éléments de $E$, avec $i \in [\![1, n]\!]$. Par la suite, on appellera ces éléments des *points de* $E$.

**Définition 1.** *On appelle* ***polynôme intégral****, noté* $P_E$*, le polynôme ayant les points de* $E$ *comme racines.*

Par le théorème de factorisation des polynômes, on peut donner une écriture explicite de $P_E$ :

$$P_E(X) = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - e_i) \tag{1}$$

avec $\lambda$ un nombre complexe non nul (n'ayant ici aucune utilité, on prendra alors par défaut $\lambda = 1$).

Remarquons que si l'on connaît entièrement l'ensemble intégral $E$, alors on connaît entièrement le polynôme intégral $P_E$ (et inversement). Néanmoins, nous sommes confrontés à un problème de taille pour déduire explicitement des informations sur les ensembles intégraux de cardinal fini.

## 1.3 Obstruction à la construction d'ensembles intégraux non triviaux

Commençons par raisonner sur un exemple. On a précédemment construit un ensemble intégral dont les racines sont $\{0, \pm 3, \pm 4i\}$. On construit alors le polynôme intégral : $P_E(X) = X(X-3)(X+3)(X-4i)(X+4i) = X^5 + 7X^3 - 144X$. Si nous ne connaissions pas l'ensemble intégral associé, pourrions nous dire sans aucun doute qu'un tel polynôme représente un certain ensemble intégral à cinq éléments ? Plus généralement, donnons nous un polynôme $P$ arbitraire de degré cinq ou plus, le polynôme est-il intégral (c'est-à-dire, représente-t-il un ensemble intégral) ?

Le problème revient à chercher les racines de $P$. À partir du degré cinq, il n'existe plus de formule générale exprimant par radicaux les racines d'un polynôme en fonction de ses coefficients. Nous sommes alors face à une obstruction.

Si nous nous donnons un ensemble de points du plan, il est très simple de dire si l'ensemble est intégral ou pas. En revanche, si nous nous donnons un polynôme et si nous nous demandons s'il est intégral ou pas, le problème est ardu (et nécessite des notions d'algèbre poussées ou des méthodes sophistiquées). Néanmoins, dans certains cas précis l'étude d'ensemble intégraux par l'utilisation de polynômes intégraux est très intéressante (on le verra dans la partie 1.4.3 par l'étude de $X^n - \omega$, avec $\omega$ un nombre complexe).

## 1.4 Classification de certains ensembles intégraux

*Dans cette partie nous étudions plus en profondeur que dans la partie 1.1 les ensembles intégraux à trois et quatre éléments. Nous aurons besoin du cas à quatre éléments dans la preuve pour le cardinal infini. On illustre également la correspondance entre polynômes et ensembles intégraux par l'étude des ensembles intégraux dont les points forment un polygone régulier.*

### 1.4.1 Ensemble à trois éléments

Comme vu précédemment, le cas à trois éléments se sépare en deux catégories. La première étant celle des ensembles intégraux triviaux à trois éléments. Ici rien de très palpitant, il suffit que les deux segments qui composent la figure aient une longueur entière. La deuxième catégorie regroupe les ensembles intégraux dont les trois points forment un triangle non plat. Si le triangle est rectangle, on sait (cf. partie 1.1) que les seuls ensembles intégraux sont les triangles dont les longueurs sont des triplets pythagoriciens. Lorsque le triangle est équilatéral il suffit que l'un des côtés ait une longueur entière. Lorsque le triangle est quelconque ça devient plus compliqué on peut cependant raisonner de manière astucieuse pour obtenir le nombre d'ensemble intégral de cardinal trois sachant que l'on a deux longueurs données. Notons ces longueurs entières $a$ et $b$, avec $a < b$.

**Proposition 2.** *Il y a exactement $2a-1$ ensembles intégraux différents non triviaux à trois éléments, pour des longueurs a et b fixées.*

Afin de prouver convenablement le résultat, nous avons besoin d'un lemme (ré-utilisé plus tard) :

**Lemme 3** (Al-Kashi)**.** *Soient A, B et C trois points du plan. Alors :*

$$||\overrightarrow{BC}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - 2||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}||\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}). \tag{2}$$

*Démonstration.* Les trois points sont représentés, respectivement, par leurs coordonnées $(x_a, y_a)$, $(x_b, y_b)$ et $(x_c, y_c)$. Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \begin{pmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_c - x_a \\ y_c - y_a \end{pmatrix} && (3)\\
&= (x_b - x_a)(x_c - x_a) + (y_b - y_a)(y_c - y_a) && (4)\\
&= x_b x_c - x_b x_a - x_a x_c + x_a^2 + y_b y_c - y_b y_a - y_a y_c + y_a^2 && (5)
\end{aligned}$$

Calculons désormais la quantité suivante :

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{AB}||^2 + ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BC}||^2 &= x_b^2 + 2x_a^2 + y_b^2 + 2y_a^2 + x_c^2 + y_c^2 - 2(x_a x_b + y_a y_b + x_a x_c + y_a y_c) && (6)\\
&\quad - \left(x_c^2 + x_b^2 + y_c^2 + y_b^2 - 2(x_b x_c + y_b y_c)\right) && (7)\\
&= 2(x_a^2 + y_a^2 - x_a x_b - y_a y_b - x_a x_c - y_a y_c + x_b x_c + y_b y_c) && (8)\\
&= 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} && (9)\\
&= 2||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}||\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}). && (10)
\end{aligned}$$

□

On peut désormais prouver le résultat désiré :

*Démonstration.* Dans un triangle si l'on connaît deux longueurs il suffit de connaître l'angle entre les deux pour connaître la troisième grâce au lemme 3 d'Al-Kashi. Calculons cette longueur : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$ où $\gamma$ est l'angle entre nos deux longueurs. Or $\cos(\gamma) \in [-1, 1]$ donc $c$ est maximal quand $\cos(\gamma) = -1$ et $c$ est minimal quand $\cos(\gamma) = 1$ donc $\max(c) = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab} = a + b$ et $\min(c) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab} = a - b$ donc $c \in [a - b; a + b]$ on ne veut pas prendre en compte les ensemble triviaux c'est à dire lorsque $\gamma = 0$ ou $\gamma = \pi$ radians. L'intervalle comporte $(b + a) - (b - a) + 1 = 2a + 1$ nombres entiers car b+a et b-a sont tous les deux des entiers. Il faut cependant les retirer car c'est les cas où notre ensemble est trivial. Il y a au plus $2a - 1$ ensembles intégraux non triviaux lorsque l'ensemble possède trois points avec deux distances connues a et b vérifiant $a < b$.

Pour démontrer qu'il y en a exactement $2a-1$, on constate que le cosinus atteint toutes les valeurs de l'intervalle car c'est une fonction continue. C'est pourquoi on en a exactement $2a - 1$ ni plus ni moins. □

### 1.4.2 Ensemble à quatre éléments

Pour les ensembles à quatre éléments c'est plus compliqué d'avoir des résultats non triviaux. On peut commencer par remarquer qu'il est impossible qu'un ensemble intégral à quatre points soit un carré. En effet grâce au théorème de Pythagore on sait que la diagonale du carré vaut $c = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$ or $a$ est un entier sinon l'ensemble n'est pas intégral et $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $c$ n'est pas entier. Ensuite dans le cas du rectangle il suffit que les deux longueurs du rectangle et la longueur de la diagonale forment un triplet pythagoricien et on a un ensemble intégral. Sinon on peut construire un polynôme de degré quatre qui à pour racine des points de l'ensemble intégral. Pour cela on cherche quatre nombres complexes $a+ib$, $c+id$, $e+if$ et $g+ih$ qui vérifient tous ces équations :

$$\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2} = A_0, \sqrt{(a-e)^2+(b-f)^2} = A_1, \sqrt{(a-g)^2+(b-h)^2} = A_2 \tag{11}$$

$$\sqrt{(c-e)^2+(d-f)^2} = A_3, \sqrt{(c-g)^2+(c-h)^2} = A_4, \sqrt{(e-g)^2+(f-h)^2} = A_5 \tag{12}$$

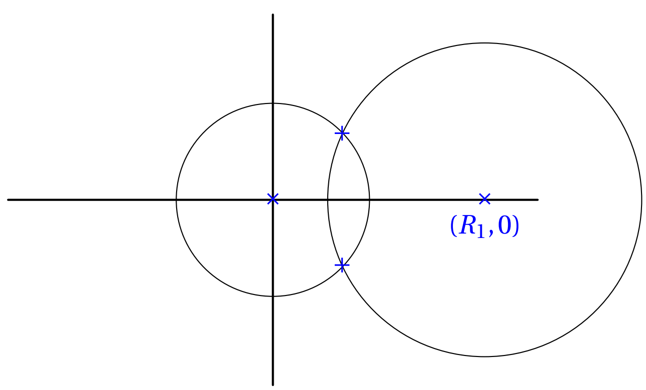
avec $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5) \in \mathbb{N}^6$.

Peut-on néanmoins trouver une caractérisation des ensembles intégraux à quatre points plus "intéressante" ? Une caractérisation serait plus intéressante si elle n'utilisait pas 14 variables comme ci-dessus (d'autant plus que cette dernière ne fournit aucun moyen pour construire ledit ensemble intégral).

**Proposition 4.** *Il existe une paramétrisation de tous les ensembles intégraux de quatre éléments n'utilisant que six paramètres.*

*Démonstration.* Sans aucune perte de généralité, on peut fixer deux points de l'ensemble intégral $E$ à quatre éléments. De fait, quitte à faire une rotation et une translation (qui sont des **isométries**), les points $(0,0)$ et $(R_1, 0)$ sont deux points de l'ensemble intégral, avec $R_1$ un entier naturel non nul.

Déterminons explicitement le troisième point. Pour ce faire, remarquons que tous les points à distance entière du premier et du deuxième point sont déterminés par l'intersection de deux courbes : respectivement, un cercle de rayon $R_2$ et de centre $(0,0)$ et un cercle de rayon $R_3$ et de centre $(R_1, 0)$.




Algébriquement, nous trouvons que les points d'intersection sont solutions du système suivant :

$$x_3^2 + y_3^2 = R_2^2 \tag{13}$$

$$(x_3 - R_1)^2 + y_3^2 = R_3^2 \tag{14}$$

On injecte 13 dans 14 pour obtenir :

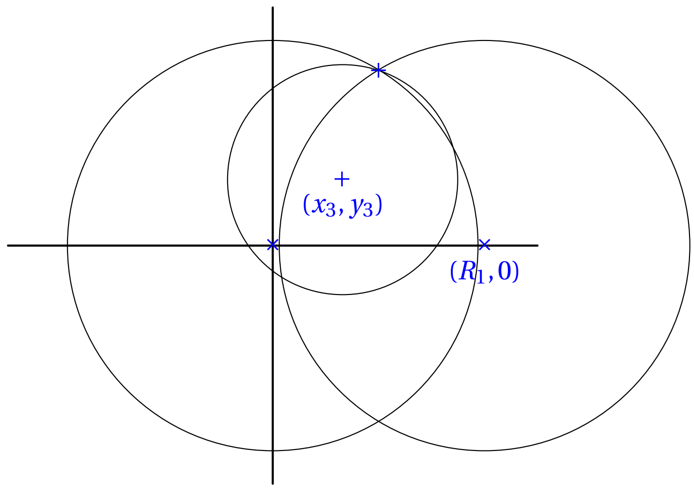
$$x_3 = \frac{R_2^2 + R_1^2 - R_3^2}{2R_1}. \tag{15}$$

Il en vient alors :

$$y_3 = \pm \frac{1}{2R_1}\sqrt{4R_1^2R_2^2 - (R_2^2 + R_1^2 - R_3^2)^2} \tag{16}$$

lorsqu'une telle expression est correctement définie, c'est-à-dire lorsque $4R_1^2R_2^2 \geq (R_2^2 + R_1^2 - R_3^2)^2$, ce qui implique $2R_1R_2 \geq R_2^2 + R_1^2 - R_3^2$.

Remarquons que deux points sont alors possibles. On choisit arbitrairement et sans perte de généralité celui d'ordonnée positive. Construisons désormais le quatrième point de manière similaire : dans le cas de trois cercles, on peut avoir au maximum six intersections. Néanmoins, ce n'est pas ce cas qui nous intéresse, on souhaite déterminer les points tels que les trois cercles s'intersectent en un même point.




Algébriquement, nous avons le système suivant :

$$x_4^2 + y_4^2 = R_4^2 \tag{17}$$

$$(x_4 - R_1)^2 + y_4^2 = R_5^2 \tag{18}$$

$$(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 = R_6^2 \tag{19}$$

Des équations 17 et 18, on tire :

$$x_4 = \frac{R_4^2 + R_1^2 - R_5^2}{2R_1}. \tag{20}$$

Il vient donc, en utilisant les relations 13, 17 et 19 :

$$\underbrace{x_4^2 + y_4^2}_{=R_4^2} + \underbrace{x_3^2 + y_3^2}_{=R_2^2} - 2x_4x_3 - 2y_4y_3 = R_6^2 \tag{21}$$

On trouve alors finalement :

$$y_4 = \frac{R_4^2 + R_2^2 - R_6^2 - 2x_4x_3}{2y_3} \tag{22}$$

$$= \frac{R_1}{\sqrt{4R_1^2R_2^2 - (R_2^2 + R_1^2 - R_3^2)^2}}\left(R_4^2 + R_2^2 - R_6^2 - \frac{(R_4^2 + R_1^2 - R_5^2)(R_2^2 + R_1^2 - R_3^2)}{2R_1^2}\right) \tag{23}$$

□

**Proposition 5.** *Plus généralement, on peut obtenir une proposition analogue à la proposition 4 pour un nombre fini arbitrairement grand de points. (La démonstration est strictement analogue.) Cela permettrait, entre autre, de prouver qu'il existe un ensemble intégral non trivial de cardinal n quelconque pour tout n. (La démonstration est néanmoins quelque peu lourde.)*

#### 1.4.3 Polygones réguliers à $n$ côtés

Comme on la vu dans 1.2, il existe un lien entre les polynômes et les ensembles intégraux. On a vu en cours que les racines n-ième d'un nombre complexe forment un polygone régulier à n côtés. Nous allons étudier le polynôme suivant : $P(Z) = Z^n - \omega$, avec $\omega$ un nombre complexe. On cherche les racines de $P$. Les solutions sont les sommets d'un polygone régulier à n côtés.

Raisonnons géométriquement, on considère un polygone régulier à n côtés. Pour que celui-ci soit intégral il faut tout d'abord que ses côtés aient une longueur entière, notée $a$. Il faut ensuite que toutes les distances d'un sommet à un autre soient entières. Pour se repérer, numérotons les sommets en en choisissant un au hasard auquel on attribue le chiffre 1 puis on tourne dans le sens trigonométrique et on numérote les sommets à l'aide des entiers naturels de 1 à $n$ en partant du premier sommet. On s'intéresse maintenant à la distance entre deux sommets séparés par un sommet, notons $b$ cette distance. Cette longueur $b$ est la même quelque soit le sommet choisi car le polygone est régulier. La longueur $b$ peut s'exprimer en fonction de $r$ le rayon du cercle qui passe par tous les points et $n$. D'après Al-Kashi (lemme 3) on a : $b^2 = 2r^2 - 2r\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)$. Ce qui implique alors $b = \sqrt{2r^2 - 2r\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)} = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - r\cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)}$. Il faut donc que $b$ soit un entier pour qu'on puisse espérer un ensemble intégral pour cela il faut que $r^2 - r\cos(\frac{4\pi}{n})$ soit de la forme $\frac{m^2}{2}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. $b$ vaudra alors $m$.

Or d'après le théorème de Niven (admis) on sait que les seules valeurs rationnelle du cosinus pour des arguments de la forme $\frac{\pi}{n}$ sont atteintes pour les arguments $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, 0 et $\pi$ (modulo $\pi$). Les valeurs du cosinus en ces points sont respectivement $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 1 et $-1$. Pour 1 et $-1$ ça ne peut pas marcher car on a alors que des nombres entiers et donc on ne peut pas obtenir de 2 au dénominateur. Pour les deux autres cas on est dans le cas de figure où $n = 6$ pour le $\frac{2\pi}{3}$ et $n = 12$ pour $\frac{\pi}{3}$ si on fait le calcul dans les deux cas on a

$$\boxed{n = 6} \qquad\qquad \boxed{n = 12} \tag{24}$$

$$b = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - r\cos(\frac{4\pi}{6})} \qquad\qquad b = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - r\cos(\frac{4\pi}{12})} \tag{25}$$

$$b = \sqrt{2}\sqrt{r^2 + \frac{r}{2}} \qquad\qquad b = \sqrt{2}\sqrt{r^2 - \frac{r}{2}} \tag{26}$$

$$b = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2r^2 + r}{2}} \qquad\qquad b = \sqrt{2}\sqrt{\frac{2r^2 - r}{2}} \tag{27}$$

on sait déjà que pour le cas où $n=6$, $r$ vaut $a$ donc $r$ est un entier. On cherche donc si il existe un nombre entier $r$ tel que $\sqrt{2r^2+r}=m$ si $r$ est de la forme $2k$, un nombre pair alors $\sqrt{2r^2+r}=\sqrt{2(2k)^2+2k}=\sqrt{2}\sqrt{(2k)^2+k}$ ce qui ne peut être entier.

Pour le cas ou $n=12$ on peut s'intéresser à la distance $k$, $k+3$ en effet l'angle de la formule d'Al-Kashi vaut ici $\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{4}$ ce qui ne donne pas un angle rationnel de part le théorème de Niven on peut donc l'écarter. Il ne nous reste plus que le cas où $n=6$ et où $r$ est impair on écrit $r=2k+1$ On a que :

$$2(2k+1)^2+2k+1=m^2 \tag{28}$$

$$\frac{2(2k^2+2k)+1+2k+1}{2}=\frac{m^2}{2} \tag{29}$$

$$2k^2+3k+1=\frac{m^2}{2} \tag{30}$$

Or si $k$ est entier alors $2k^2+3k+1$ est également entier, or $m^2$ est impair car $2r^2+r$ est impair.

$$\Rightarrow \frac{m^2}{2}\notin\mathbb{N} \tag{31}$$

$$\text{or } k\in\mathbb{N}\Rightarrow 2k^2+3k+1\in\mathbb{N} \tag{32}$$

Conclusion il n'existe aucun polygone régulier avec quatre sommets ou plus tel que ses sommets forment un ensemble intégral.

## 2 Cardinal infini : classification des ensembles intégraux

### 2.1 Exemples d'ensembles intégraux

Le prototype de l'ensemble intégral est $\mathbb{Z}$. Démontrons que tel est le cas.

**Proposition 6.** *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un ensemble intégral de cardinal infini.*

*Démonstration.* Soient $a$ et $b$ deux éléments de $\mathbb{Z}$ avec, sans perte de généralité, $a$ le minimum des deux éléments et $b=a+n$ (pour un certain entier naturel $n$). Alors $|b-a|=|a+n-a|=|n|=n\in\mathbb{N}$. □

**Proposition 7.** *Plus généralement, tout sous-ensemble de cardinal infini de $\mathbb{Z}$ est intégral. (La démonstration est analogue à celle de la proposition 6.)*

Peut-il exister des ensembles intégraux de cardinal infini un peu plus "exotiques" qu'une ligne droite ? Nous montrerons que non dans la partie 2.3.

On peut se demander s'il existe beaucoup d'applications transformant des ensembles intégraux de cardinal infini en ensembles intégraux de cardinal infini. Être en capacité de déterminer toutes les applications permettrait de connaître tous les ensembles intégraux. En effet, partant d'un ensemble intégral $E$ de cardinal infini, on définirait l'ensemble de tous les ensembles intégraux comme l'image de $E$ par toute transformation préservant le caractère intégral des ensembles.

### 2.2 Transformations d'ensembles intégraux

Nous savons que n'importe quel sous-ensemble infini de $\mathbb{Z}$ est également intégral. Par la suite, toutes les transformations seront faites sur $\mathbb{Z}$. **Sans perte de généralité, nous pouvons ramener toute droite à $\mathbb{Z}$ en raisonnant à isométrie (rotation, translation) près.**

Il est évident que toute rotation d'angle quelconque et de centre quelconque préserve le caractère intégral d'un ensemble. En effet, cette transformation préserve les angles et les distances entre tous les points ainsi que les angles. On dit que c'est une isométrie. Pour la même raison que pour la rotation, toute symétrie ou toute translation préserve le caractère intégral d'un ensemble. Un autre type de transformation peut être envisagé : les homothéties (conservation des angles mais pas des longueurs). Par exemple, si l'on prend $\mathbb{Z}$ et que l'on envoie chaque point sur son quintuple, on a toujours un ensemble intégral.

**Conjecture 8.** *Les seules transformations envoyant les ensembles intégraux de cardinal infini sur des ensembles intégraux de cardinal infini sont les isométries et les homothéties de facteur d'agrandissement* $k \in \mathbb{N}^*$.

Une telle conjecture est fausse pour deux raisons. On pourrait par exemple prendre un facteur d'agrandissement de $1/2$ lorsque l'ensemble intégral considéré est l'ensemble des nombres pairs. Puis, on peut construire des applications arbitraires envoyant des ensembles intégraux $E_1$ de cardinal infini sur des ensembles intégraux de cardinal infini $E_2$. Pour ce faire, il suffit de prendre une fonction $f_1$ continue quelconque [1] de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et de considérer l'application :

$$\begin{aligned} F\colon E_1 &\longrightarrow E_2 \\ (X,Y) &\longmapsto (\lfloor f_1(X,Y) \rfloor, 0). \end{aligned}$$

On suppose néanmoins avoir fait une rotation et/ou une translation pour avoir au moins deux points de l'ensemble intégral sur l'axe des abscisses. [2]

### 2.3 Classification des ensembles intégraux

On se propose de répondre à la question initiale : ***quels sont les ensembles intégraux de cardinal infini ?***

**Proposition 9.** *Soit E un ensemble intégral de cardinal infini, tous les points de E sont alignés sur une même ligne droite.*

Il est alors absolument évident que la proposition suivante est vraie (car la distance entre deux points voisins de $\mathbb{Z}$ est toujours de $1 = \min_{i \in \mathbb{N}^*} i$) :

**Proposition 10.** *Au sens de l'ordre pour l'inclusion,* $\mathbb{Z}$ *est le plus grand ensemble intégral de cardinal infini.*

Grâce aux propositions 7, 9, et 10, on en arrive finalement au résultat ci-dessous décrivant tous les ensembles intégraux de cardinal infini :

**Proposition 11.** ***À isométrie près, un ensemble de cardinal infini $X$ est intégral si et seulement si $X \subseteq \mathbb{Z}$.***

Pour prouver la dernière chose qu'il nous reste à démontrer (la proposition 9), nous avons envisagé sept démonstrations différentes. Un certain nombre de démonstrations ne marchaient tout simplement pas ou ne nous permettaient pas de conclure avec certitude. Nous pensons toutefois avoir au moins une démonstration satisfaisante de la proposition 9.

1. Il faut tout de même, par exemple, supposer que les valeurs de la fonction ne "s'accumulent" pas sur un intervalle du type $[N, N+1[$ avec $N \in \mathbb{N}$ (autrement, en prenant la partie entière comme suit, tous les points de l'ensemble intégral seraient concentrés en un seul point, et l'ensemble ne serait plus de cardinal infini (car réduit à un nombre fini de points)).

2. Nous pourrions formuler une conjecture plus précise et sans doute même la démontrer à l'aide du théorème fondamental de la géométrie projective.

*Démonstration de la proposition 9.* Les objets mathématiques peuvent être vus de diverses manières en fonction du cadre d'étude. Par exemple, ce qui géométriquement est une ligne droite peut se concevoir analytiquement comme une fonction de dérivée nulle ou plus généralement constante.

Soit une ligne droite quelconque. On veut montrer que tous les points de l'ensemble intégral de cardinal infini $E$ sont bel et bien sur cette même ligne droite. Revenons à l'analogie géométrie – analyse : on caractérise une droite par une courbe dont le taux d'accroissement en tout point de cette courbe est constant. Le problème revient donc à montrer que le taux d'accroissement, noté $\gamma$, est constant.

Prenons deux points de $E$ : $a = x_a + iy_a$ et $b = x_b + iy_b$. Par définition, on a $|b - a| \in \mathbb{N}$. Cette appartenance est strictement équivalente à avoir :

$$M = |x_b + iy_b - (x_a + iy_a)| = |x_b - x_a + i(y_b - y_a)| \tag{33}$$

avec $M$ un entier naturel. Si l'on divise $M$ par $x_b - x_a$, on obtient :

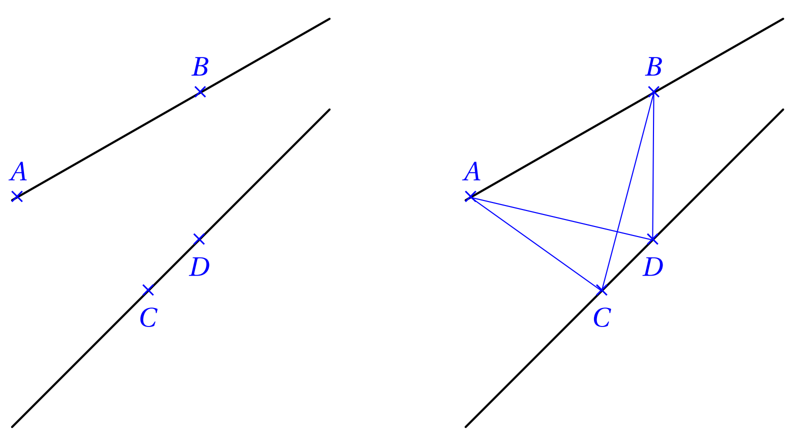
$$\frac{M}{x_b - x_a} = \left|1 + i\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right|. \tag{34}$$

[3]. On remarque que l'égalité est strictement équivalente à :

$$\frac{M}{x_b - x_a} = \left|1 + i\gamma\right| \tag{35}$$

avec $\gamma$ le taux d'accroissement.

Démontrons le résultat désiré par l'absurde. Supposons que $\gamma$ soit non constant. Cela revient à dire que le taux d'accroissement entre (au moins) deux paires de points différents n'est pas nécessairement le même. Ceci est alors équivalent à dire qu'il existe (au moins) deux **différentes** paires de points ne pouvant pas être sur les deux mêmes lignes droites. Une telle situation est représentée par la figure à gauche. Par hypothèse, nous savons que la distance entre $A$ et $B$ et entre $C$ et $D$ est entière. Néanmoins, comme nous avons quatre points, quatre autres distances existent. Elles sont représentées en bleu sur la figure à droite (la figure n'est qu'indicative) :




3. Il faut néanmoins bien faire attention à ce que $x_b - x_a$ soit positif, dans le pire des cas, on prend la valeur absolue de $M/(x_b - x_a)$.

On a alors ramené le problème en l'étude de l'intégralité d'un ensemble à quatre points[4]. Or, tous les ensembles intégraux à quatre éléments ont été déterminés dans la partie 1.4.2. L'argument clef pour démontrer l'impossibilité (et ainsi obtenir la contradiction) réside dans le fait que, pour tout point de l'ensemble intégral, chaque sous ensemble à quatre éléments de l'ensemble intégral devrait lui même être intégral (ce qui est absurde).

Grâce à la proposition 4, on peut déterminer en fonction de six paramètres l'ensemble des ensembles intégraux à quatre éléments. Ayant une expression explicite de chacun des points de l'ensemble intégral, on peut construire le polynôme intégral (définition 1). On construit alors un tel polynôme intégral pour chaque sous-ensemble de quatre points de l'ensemble intégral de cardinal infini.

Pour un certain $j$ (un itérateur sur l'ensemble des sous-ensembles de quatre points dudit ensemble intégral de cardinal infini) et à une translation ou une rotation près, l'équation de la courbe d'un polynôme intégral est de la forme :

$$P_{E,j}(X) = X(X - R_{1,j})(X - (x_{3,j} + i y_{3,j}))(X - (x_{4,j} - i y_{4,j})) \tag{36}$$

Comme on a supposé que l'ensemble était intégral, le produit de deux polynômes intégraux du même ensemble sera lui-même intégral. Ainsi, $\Delta(X) := P_{E,j}(X)P_{E,j+1}(X)$ est intégral.

On pourrait (mais ici ce n'est pas nécessaire) calculer explicitement $\Delta(X)$. Intéressons nous plutôt au taux d'accroissement entre quatre des huit racines de $\Delta$ :

$$\gamma_{X_1X_2} := \frac{\Delta(X_1) - \Delta(X_2)}{X_1 - X_2} \text{ et } \gamma_{X_3X_4} := \frac{\Delta(X_3) - \Delta(X_4)}{X_3 - X_4} \tag{37}$$

avec $X_1$, $X_2$, $X_3$ et $X_4$ des points de l'ensemble intégral. Par hypothèse, les deux quantités $\gamma_{X_1X_2}$ et $\gamma_{X_3X_4}$ sont différentes. On a ainsi démontré que : pour tout couple $(X_1, X_2)$ différent de $(X_3, X_4)$, on a $\gamma_{X_1X_2} \neq \gamma_{X_3X_4}$ si les deux couples ne sont pas alignés. Ceci est exactement la définition de l'injectivité de la fonction $\gamma$ sur un ensemble de quatre points non alignés. Contradiction, il est évident que la fonction $\gamma$ n'est pas injective sur un tel ensemble. En effet, $(A, B)$ et $(C, D)$ étant des racines distinctes de $\gamma$, on a $\gamma_{AB} = \gamma_{CD}$. Contradiction, on a à la fois prouvé que la fonction était injective et non injective. Ceci conclut la preuve. □

# 3 Ouverture

*Comme l'article faisait plus de dix pages, il a été drastiquement réduit et confiné à l'essentiel. Cette partie n'est laissée que sous la forme d'un résumé.*

Intuitivement, on saisit aisément que les "lignes droites" sont des solutions du problème. Néanmoins, est-ce que ce sont les seules? Dans cette partie, nous avons généralisé le problème et pour démontrer que ce sont effectivement les seules solutions, nous avons raisonné sur la "forme" d'objets géométriques en cherchant ce qui fait la spécificité d'une "ligne droite" (par rapport à un cercle par exemple) au vue de notre problème. Pour ce faire, il a fallu construire de toutes pièces des manières de "mesurer des formes", de voir comment l'on "déforme une forme en une autre"... tout en se souciant de la notion de distance. L'on a, ensuite, pu utiliser un tel formalisme pour généraliser la question dans le cadre d'une distance quelconque sur un espace métrique.

On a souhaité développer une manière (naturelle si possible) de manipuler les objets abstraits que sont les éléments d'un ensemble intégral. Pour ce faire, nous avons "enrichi" le cadre conceptuel des en-

4. Plus précisément, il faudrait ensuite considérer toutes les distances possibles entre tous les ensembles à quatre points possibles. Nous n'en aurons pas besoin.

sembles intégraux en commençant par les généraliser au cas des espaces métriques. On en profite ensuite pour récupérer des informations métriques et analytiques afin d'en déduire, finalement, une information de nature géométrique (alignement, arrangement des éléments d'un espace intégral).

L'idée est alors la suivante [5] : deux points quelconques d'un espace métrique sont dits **liés** s'il existe une application continue passant par ces deux points. Nous considérons l'ensemble des manières de lier tous les points d'un espace métrique ; à l'intérieur de cet ensemble, il existe ce que nous avons appelé des **chaînes**. Ces chaînes peuvent relier un nombre fini de points ou une infinité. Par un astucieux jeu de **déformations** de chaînes (en respectant des contraintes, typiquement celles imposées par la définition d'un ensemble intégral), nous cherchons à **mesurer** certaines propriétés géométriques [6] des chaînes afin de caractériser par certains types de chaînes les ensembles intégraux.

Grâce à une telle construction, nous prouvions une proposition analogue à celle numéro 11. La démonstration se généralisait bien et ramenait le problème à une question d'arithmétique sur les points de l'espace métrique dans lequel nous travaillons.

5. On néglige les détails "techniques" afin de gagner en clarté.
6. Par exemple la mesure de la linéarité des chaînes, c'est-à-dire, "à quel point la chaîne forme-t-elle une ligne droite ?".