

# Détection de particules chargées dans un modèle simplifié de chambre à bulles

Decan de Chatouville R.

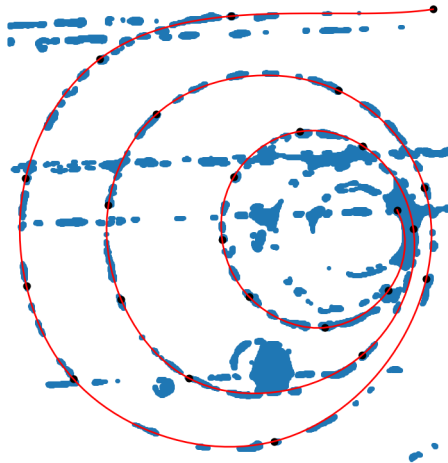
Garnier M.

## Résumé

L'article que nous avons sélectionné ([BBSG93]) utilise divers raisonnements géométriques pour détecter des particules au sein d'une chambre à bulles (avec, par exemple, des mesures du rayon de courbure). Nous nous sommes demandés si un raisonnement analytique pouvait produire des résultats similaires. À cet effet, que ce soit dans le cadre de la mécanique classique ou dans celui de la relativité restreinte, nous dérivons les équations du mouvement d'une particule chargée dans un modèle simplifié de chambre à bulles. Ensuite, nous trouvons une relation nous permettant de détecter (à une certaine incertitude près) des particules grâce à leur rapport masse sur charge. Pour ce faire, nous avons dû combiner une étude numérique de la trajectoire d'une particule (résolution numérique d'équations différentielles non linéaires ou interpolation de données) avec l'étude de certaines équations (en particulier, l'équation de Riccati).

Notre but a donc été de développer un modèle théorique et réduit de détecteur de particules.

Nous sommes en capacité de détecter certaines particules (électron, pion, muon, méson<sup>1</sup>) avec une précision relativement bonne. Il semblerait que l'ordre de grandeur soit relativement correct. Néanmoins, cela reste très perfectible : la méthode semble, sur le principe, fonctionner. Toutefois, elle reste trop naïve.



---

1. Aucune idée précise de ce que sont exactement ces "particules élémentaires".

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Physique des particules . . . . .	3
1.2	Problématique . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Fonctionnement général d'une chambre à bulles</b>	<b>5</b>
2.1	Configuration initiale . . . . .	5
2.2	Cycles de fonctionnement (évolution de la pression et de la température) . . . . .	5
2.3	Propriétés métastables des liquides en surébullition ( <i>superheated liquids</i> ) . . . . .	6
2.4	Nucléation de bulles . . . . .	7
2.5	Acquisition photographique de la trajectoire de particules . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Détection de particules : modélisations de trajectoires</b>	<b>8</b>
3.1	Étude dans un modèle de chambre à bulles simplifié . . . . .	8
3.1.1	Étude dans le cadre de la mécanique classique . . . . .	8
3.1.2	Étude avec un modèle relativiste . . . . .	11
3.2	Détection de particules chargées par analyse de trajectoire . . . . .	13
3.2.1	La " <i>méthode Riccati</i> " . . . . .	14
3.2.2	Comparaison théorique – expérimentale . . . . .	16
3.2.3	Comparaison classique – relativiste . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Limites d'une chambre à bulles</b>	<b>19</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>19</b>
	<b>Références</b>	<b>20</b>

# 1 Introduction

*Dans cette partie, nous définissons très brièvement ce qu'est la physique des particules, également appelée physique des hautes énergies. L'introduction à ce domaine de recherche nous permet ensuite de nous poser des questions cruciales. En particulier, comment détecter des particules élémentaires ? De nombreux modèles et de multiples expérimentations ont su renseigner sur la nature de la matière et faire avancer l'état de la recherche.*

*Nous nous intéressons uniquement à un modèle bien particulier : la chambre à bulles, initialement conçue par Donald A. Glaser.*

## 1.1 Physique des particules

Au commencement fut l'électron. La découverte de l'électron est révolutionnaire. La conception traditionnelle de l'atome, héritée des philosophes grecs, doit être remise en cause : les atomes ne sont pas insécables, mais sont des "entités composites" ([Gol13]). La formalisation et la détermination du modèle atomique devient alors une question de première importance ! Thomson, Rutherford, Bohr, Schrödinger et bien d'autres tentent tous d'expliquer la nature de l'atome.

En première approximation, selon les théories modernes, l'atome est perçu et conçu comme un pudding (Thomson, [Tho04]), une soupe de charges positives venant contrebalancer les charges négatives des électrons (afin d'assurer la neutralité de l'atome). Moins de dix ans plus tard (Rutherford, [Rut11]), la mise en évidence d'un noyau atomique amène à considérer plus précisément ce que pourraient être ces "charges positives", à savoir des protons. La démonstration de l'existence d'une troisième particule fut moins évidente. En effet, le neutron ne portant pas de charge, de nouvelles méthodes ont dû être envisagées (Chadwick, [Cha32a], [Cha32b]).

Le modèle de l'atome alors le plus avancé, celui de Niels Bohr, était calqué sur la manière dont fonctionne la physique classique (en particulier la physique newtonienne). Les électrons étaient pensés comme "gravitant autour d'un noyau". Un tel modèle présente des lacunes : s'il fonctionnait en accord avec la dynamique newtonienne, alors les électrons devraient s'effondrer au bout d'un certain temps sur le noyau<sup>2</sup>. Un tout nouveau modèle, celui de Schrödinger, vient radicalement changer la compréhension de la matière<sup>3</sup>. *Notre projet délaisse tout effet quantique, il serait néanmoins intéressant de prendre en compte (plus tard) de tels effets.*

L'atome n'est que le premier pas vers la physique des particules. Pour le voir, nous devons changer de perspective et envisager des formalismes nouveaux (pour nous).

Nous venons de constater les lacunes du modèle newtonien. La vitesse des particules n'est pas

---

2. Au fur et à mesure de leur mouvement, les électrons devraient alors perdre de l'énergie (d'autant plus que l'atome est "massif"). La trajectoire ne pouvant alors pas être circulaire (tel que prédit par le modèle de Rutherford). Ceci empêcherait l'existence de tout atome un tant soit peu "massif".

3. Nous avons cru comprendre que l'équation de Schrödinger, que nous saurons résoudre en deuxième année, admettait des formes de "généralisations" (équation de Klein-Gordon, équation de Dirac pour les particules de spin 1/2).

négligeable devant la vitesse de la lumière, il faut alors prendre en compte le modèle de la relativité restreinte (Einstein, [ES55]). La mécanique n'est ainsi plus du tout la même.

Au-delà de ce bouleversement, il faut également prendre en compte qu'il existe quatre différentes interactions fondamentales. Les physiciens semblent avoir eu tendance à postuler l'existence d'un champ associé à chacune des différentes interactions. Ces champs se manifesteraient via des particules appelées "*porteurs de force*". On trouverait le photon pour l'électromagnétisme, le gluon pour la force nucléaire forte, les bosons  $Z$ ,  $W^+$  et  $W^-$  pour la force nucléaire faible. Concernant la force de gravitation, la découverte ou l'existence d'un porteur de force reste une question encore ouverte.

On évoque plus haut des bosons, c'est un type de particule. Il existe deux principaux types de particules : les bosons et les fermions. Les fermions ont tous un nombre quantique magnétique de spin égal à une fraction avec 2 au dénominateur et un nombre impair au numérateur. Ce sont les particules qui forment la matière. L'électron et le proton en sont des exemples. Les bosons, eux, ont un nombre quantique magnétique de spin qui est un entier, c'est dans cette catégorie que se trouvent les porteurs de force. Dans ce paragraphe, nous n'évoquons que la surface d'un immense domaine de la physique et nous le faisons de manière très simplifiée car on a pas les connaissances pour le pousser très loin et cette petite introduction au modèle standard sert surtout à faire remarquer qu'il existe un très grand nombre de particules élémentaires différentes. Les physiciens des particules ont donc pour mission, entre autre, d'en trouver un maximum. Pour cela il faut les détecter et là on ne manque pas de moyen de détection.

On peut notamment citer la chambre à brouillard (Wilson, [Wil97], [Wil99]) inventée par Charles Wilson elle permet de détecter des particules chargées, en effet la chambre est remplie d'eau, d'alcool ou d'un mélange des deux, elle est constituée d'une plaque chaude en haut et d'une plaque froide en bas. L'eau ou l'alcool arrive en haut sous forme de gaz, il descend ensuite. L'environnement est alors saturé en vapeur et quand une particule chargée arrive elle laisse une trace de condensation sur son passage. Les molécules sur le passage de la particule sont ionisées et comme les molécules d'eau et d'alcool sont polaires elles sont attirées par les charges libres laissés par l'ionisation.

Les chambres à brouillards seront vite remplacées par les chambres à bulles, bien plus prometteuses à l'époque.

On raconte que c'est en regardant dans sa bière que Donald A. Glaser aurait eu l'idée des chambres à bulles ([Gia06]).

En décembre 1960, Donald A. Glaser reçoit le prix Nobel pour l'invention de la chambre à bulles.

## 1.2 Problématique

Suite à l'analyse qualitative de différentes photographies de la trajectoire de particules dans une chambre à bulles ([BBSG93], [CER77], [Adv21]), nous avons souhaité faire une analyse quantitative. Plus que cela, nous avons essayé de dériver les équations d'évolution régissant le mouvement des particules. Notre objectif était de partir d'un modèle très simplifié de chambre à bulles et de le

complexifier au fur et à mesure de l'étude.

Fondamentalement, notre première problématique se concevait ainsi : jusque dans quelle mesure pouvons-nous développer un modèle de chambre à bulles ? Plus précisément, comment varient les différentes grandeurs physiques que nous étudions (en particulier la trajectoire<sup>4</sup>) au fur et à mesure que nous complexifions notre modèle de chambre à bulles ?

Dans les faits, nous avons surtout bâti notre problématique dans l'optique de tester et d'éprouver notre modèle. Pour ce faire, nous comparons des résultats expérimentaux obtenus en laboratoire avec nos résultats théoriques. En d'autres termes, nous cherchons à savoir si notre modèle de chambre à bulles est un bon (ou plutôt pas trop mauvais) détecteur de particules ?

L'une des questions qui nous a guidé était : pouvons nous trouver une méthode différente de celle proposée dans l'article d'étude (qui utilisait un raisonnement géométrique portant sur le rayon de courbure) ? Nous avons cherché une méthode dans la continuité de ce que nous avons vu en cours : utilisation du principe fondamental de dynamique, en dériver une relation portant sur une quantité d'intérêt puis analyser les données obtenues.

## 2 Fonctionnement général d'une chambre à bulles

*Dans cette partie, nous suivons un cycle de fonctionnement d'une chambre à bulles.*

*Cette partie nous a permis de nous faire une idée des approximations que nous devons effectuer pour modéliser notre chambre à bulles. La chambre à bulles n'est ainsi pas notre objet principal d'étude, elle est le système dans lequel se déroule notre modélisation. Rappelons que notre problématique ne porte pas sur le fonctionnement d'une chambre à bulles mais plutôt sur la manière d'utiliser une telle expérimentation pour détecter des particules.*

### 2.1 Configuration initiale

On prend un accélérateur de particule ayant une énergie de 1 GeV, celui-ci arrive dans une chambre à bulles cylindrique d'une dizaine de centimètres cubes (pour les plus petites). La chambre à bulles est remplie d'hydrogène liquide. Dans l'enceinte de la chambre à bulles règne un champ magnétique de 1 Tesla (ces chiffres sont inspirés de chambres à bulles ayant existé de manière à avoir des chiffres un minimum cohérent ; cependant nous ne sommes pas certain qu'ils soient les plus pertinents) [Wik].

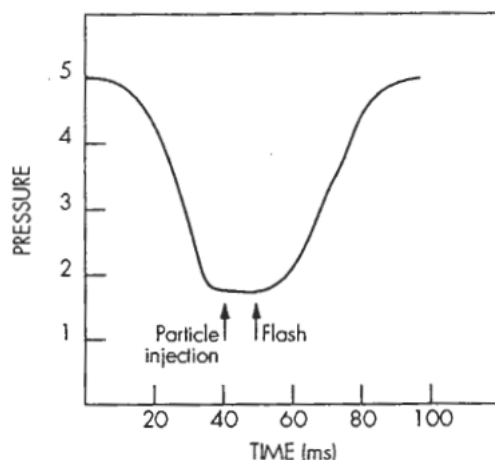
### 2.2 Cycles de fonctionnement (évolution de la pression et de la température)

Une chambre à bulles fonctionne grâce à un piston qui permet de faire un cycle de hautes pressions, basses pressions dans l'enceinte de la chambre. Ces cycles ont pour but de mettre le liquide de la

---

4. Un des premiers enseignements du cours d'Atomistique I a été de réaliser que la notion de "trajectoire" ne fait plus forcément de sens à l'échelle des électrons. Nous négligeons totalement les différents effets quantiques, hors de notre portée.

chambre dans un état dit "métastable" dont nous parlerons un peu plus en détail dans le 2.3. Cet état permet la formation des bulles. On voit ci-dessous un exemple de cycle :



↑ Fig. 4  
 Pressure cycle in a bubble chamber exposed to a particle beam at an accelerator. The chamber becomes sensitive after reducing the pressure. About 10 ms after reducing the pressure, the particle beam is sent to the chamber. The flash is activated about 10 ms later and the cycle is terminated about 20 ms later when the bubble chamber pressure is increased.

FIGURE 1 – Graphique représentant la pression en fonction du temps dans l'enceinte de la chambre à bulles.

On peut voir sur ce graphique (provenant de [BBSG93]) plusieurs parties du cycle de fonctionnement classique d'une chambre à bulle. Tout d'abord la chambre est dans sa pression habituelle (bien au-dessus de la pression atmosphérique). Lorsque le piston est en position étendue, il comprime le liquide. Puis le piston se contracte, il libère de l'espace dans la chambre ce qui fait chuter la pression. Le liquide devrait alors se vaporiser mais ne le fait pas, c'est l'état métastable. Le piston reste ensuite complètement comprimé pendant quelques dizaines de millisecondes. C'est le moment durant lequel les particules sont envoyées et qu'elles produisent les bulles. La photo est ensuite prise puis le piston se ré-étend finissant ainsi le cycle. La température dans la chambre à bulles reste stable quant à elle même si elle semble être à l'origine de la formation de bulles comme évoqué dans l'article suivant [Ten63].

### 2.3 Propriétés métastables des liquides en surébullition (*superheated liquids*)

Un liquide est dit métastable s'il est dans un état de la matière qui ne va pas durer dans le temps même si il ne subit aucune perturbation majeure. Dans le cas de la chambre à bulles, le liquide est dans un état métastable lorsque les particules y rentrent, plus précisément il est dans un état "*superheated*" que l'on pourrait traduire en français par surébullition. Un liquide est dit en surébullition s'il est sous

forme liquide à une température au-dessus de sa température d'ébullition pour la pression ambiante ([CSM12]). Ils ont pour propriété intéressante, dans le cadre des chambres à bulles, de créer facilement des clusters de vapeur autour des impuretés ou lorsqu'on leur impose une légère perturbation. Ces clusters sont les bulles de notre chambre. Elles sont donc créées le long du passage de chacune des particules accélérées, mais aussi sur les bords de la chambre car ils présentent forcément quelques rugosités (liées à la qualité de la verrerie).

## 2.4 Nucléation de bulles

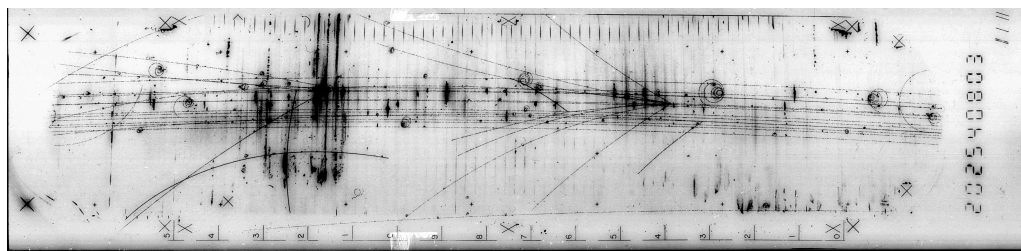
Dans une chambre à bulles, il y a des bulles. Mais comment sont formées ces bulles ? Cela pourrait sembler être une question plutôt facile... du moins pour des spécialistes du domaine. La réalité semble toute autre. D'après ce papier de 1963 [Ten63], il semblerait que contrairement à la chambre à brouillard ce ne soit pas l'ionisation qui soit à l'origine de la nucléation. Cependant les auteurs ne savent pas ce qui est à l'origine des bulles, ils penchent pour l'hypothèse de la chaleur générée par la particule durant son trajet dans la chambre qui permettrait la vaporisation du liquide métastable créant ainsi une bulle.

En 1988, la question de l'origine de la nucléation des bulles n'était toujours pas réglée ([Har88]).

## 2.5 Acquisition photographique de la trajectoire de particules

Avant de pouvoir traiter des données, il faut les acquérir.

Une fois que les bulles ont été formées (voir la partie 2.4 ; une cinquantaine de micro secondes dans le cas 1), quatre caméras placées autour de la chambre à bulles vont chacune prendre une photographie de la scène ([BSG93], page 4). Les particules évoluant dans un environnement tridimensionnel, une reconstruction stéréoscopique va être opérée. En effet, grâce à plusieurs points de vue, la même trajectoire va être captée avec des angles différents. Il s'agit alors de reconstruire, comme le feraient nos yeux, la scène 3D en un modèle exploitable en deux dimensions. On obtient donc une image, par exemple :



Il convient de ne pas oublier de prendre en compte un rapport d'agrandissement (afin de respecter les échelles de grandeur)<sup>5</sup>.

La dernière étape afin de pouvoir détecter une particule réside dans l'étude de la courbe obtenue. On détermine le rayon de courbure par un raisonnement géométrique en utilisant le théorème de Pythagore

5. Dans notre cas, comme expliqué partie 3.2.2, cela n'est pas utile car nous étudions des rapports de grandeurs.

([Rud16], [JW19]). Il ne reste alors plus qu'à utiliser une relation entre la quantité de mouvement, le rayon de courbure et la magnitude du champ magnétique (ainsi qu'un coefficient d'agrandissement <sup>6</sup>).

### 3 Détection de particules : modélisations de trajectoires

*Dans cette partie, nous définissons formellement le cadre d'étude. Dans un premier temps, nous fixons un modèle simplifié de chambre à bulles en expliquant les approximations que nous faisons et les grandeurs et effets que nous prenons en compte. Ensuite, nous dérivons dans deux cas différents les équations du mouvement d'une particule chargée dans notre modèle de chambre à bulles. Dans le premier cas, nous faisons une étude dans la droite lignée du programme de physique du premier semestre. Dans le second cas, nous tentons de prendre en compte l'effet de la relativité restreinte sur notre système (nous incorporons un terme  $\gamma$  et avançons de manière analogue au cas classique).*

#### 3.1 Étude dans un modèle de chambre à bulles simplifié

Nous approximons une chambre à bulles telle une zone de l'espace dans lequel règne un champ magnétique constant et dans laquelle existe des frottements fluides.

Une étude plus poussée nécessiterait la prise en compte de la qualité métastable du fluide, de la composition chimique du fluide (hydrogène liquide, mélange de néon et d'hydrogène, xenon, propane...), de la température et de la pression, d'effets quantiques et relativistes (plus poussés que ceux envisagés), du mécanisme de nucléation...

##### 3.1.1 Étude dans le cadre de la mécanique classique

Dans un premier temps nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique classique, c'est à dire que nous négligerons les effets quantiques ainsi que les effets relativistes. Posons donc les bases du problème que nous allons essayer de résoudre :

On considère une particule M de masse  $m$  dans un référentiel  $\mathcal{R}(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à une force  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  modélisant l'effet du champ magnétique  $\vec{B} = B\vec{e}_z$  auquel est soumise la particule. On a également la présence d'une force  $\vec{F}_f = -\alpha\vec{v}$ . On négligera l'effet du poids. À l'instant où la particule rentre dans la chambre elle possède une vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \cos(\theta)\vec{e}_x + v_0 \sin(\theta)\vec{e}_y$ .

On commence donc par écrire le PFD :

---

6. Comme dit plus tôt, fort heureusement que nous avons trouvé une méthode étudiant des rapports et rendant inutile l'introduction d'un coefficient d'agrandissement car toutes les images que nous avons étudié ne présentaient pas d'échelle suffisamment précise.



$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{M/\mathcal{R}} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{M/\mathcal{R}} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{M/\mathcal{R}} \quad (1)$$

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}_{M/\mathcal{R}} = q \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \\ 0 \end{pmatrix}_{M/\mathcal{R}} - \alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}_{M/\mathcal{R}} \quad (2)$$

on remarque que l'on a pas de mouvement selon z, on projette donc le PFD uniquement selon x et y :

$$m\ddot{x} = qyB - \alpha\dot{x} \quad (3)$$

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} - \frac{\alpha}{m}\dot{x} \quad (4)$$

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m}\dot{y} - \frac{\dot{x}}{\tau} \quad (5)$$

$$m\ddot{y} = -q\dot{x}B - \alpha\dot{y} \quad (6)$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} - \frac{\alpha}{m}\dot{y} \quad (7)$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m}\dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tau} \quad (8)$$

avec  $\tau = \frac{m}{\alpha}$ .

On pose  $v_p = \dot{x} + i\dot{y}$  on a donc  $\ddot{v}_p = \ddot{x} + i\ddot{y}$  on calcule (5) + i(8) :

$$\ddot{x} + i\ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{y} - \frac{\dot{x}}{\tau} + i\left(-\frac{qB}{m}\dot{x} - \frac{\dot{y}}{\tau}\right) \quad (9)$$

$$\ddot{v}_p = -\frac{\dot{x} + i\dot{y}}{\tau} + i\frac{qB}{m}(\dot{x} + i\dot{y}) \quad (10)$$

$$\ddot{v}_p = v_p\left(-\frac{1}{\tau} + i\frac{qB}{m}\right) \quad (11)$$

$$\ddot{v}_p - \left(-\frac{1}{\tau} + i\frac{qB}{m}\right)v_p = 0 \quad (12)$$

On résout donc l'équation différentielle (12) pour cela on écrit l'équation homogène associée :

$$r - \frac{qB}{m} + \frac{1}{\tau} = 0 \quad (13)$$

$$r = \frac{qB}{m} - \frac{1}{\tau} \quad (14)$$

Donc on a un solution de la forme  $v_p = Ce^{(\frac{qB}{m} - \frac{1}{\tau})t}$ , on détermine C avec les conditions initiales  $v_p(0) = v_0 \cos(\theta) + iv_0 \sin(\theta)$

Or  $v_p(0) = C$

Donc :

$$v_p(t) = v_0 e^{i\theta + (\frac{qB}{m} - \frac{1}{\tau})t} \quad (15)$$

$$v_p(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \cos(\theta + \omega_c t) + i(e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \sin(\theta + \omega_c t)) \quad (16)$$

avec  $\omega_c = \frac{qB}{m}$ . On trouve donc l'expression de la vitesse selon x et selon y, ce ne sont rien de plus que la partie réelle et la partie imaginaire de  $v_p(t)$ . Il ne nous reste donc plus qu'à dériver  $v_x$  et  $v_y$  pour obtenir les équations horaires du mouvement.

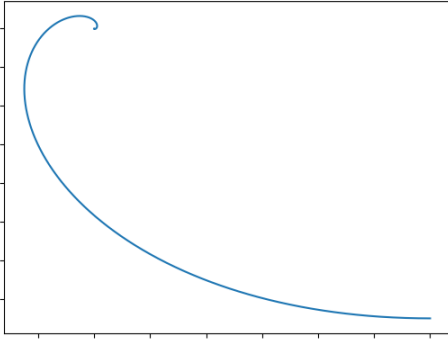
$$v_x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \cos(\theta + \omega_c t) \quad (17)$$

$$v_y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \sin(\theta + \omega_c t) \quad (18)$$

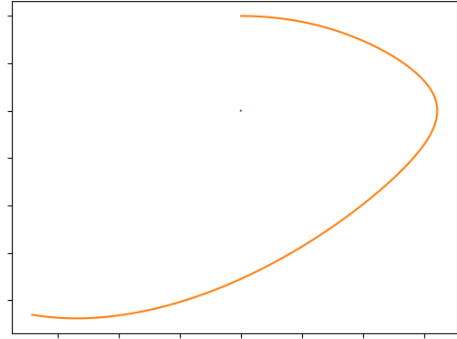
$$x(t) = -e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \omega_c \sin(\theta + \omega_c t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \cos(\theta + \omega_c t) \quad (19)$$

$$y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \omega_c \cos(\theta + \omega_c t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \sin(\theta + \omega_c t) \quad (20)$$

On obtient alors lorsqu'on met des valeurs et que l'on fait les calculs par ordinateur les courbes ci-dessous :



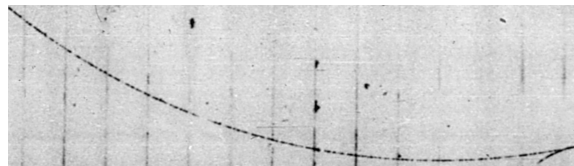
(a) Modélisation théorique (mécanique classique) de la trajectoire d'un électron (chargé négativement)



(b) Modélisation théorique (mécanique classique) de la trajectoire d'un pion (chargé positivement)



(a) Trajectoire d'un électron, obtenue expérimentalement dans une chambre à bulles



(b) Trajectoire d'un pion, obtenue expérimentalement dans une chambre à bulles

Quand on compare les deux figures (a) et (b) entre elles et les deux figures entre elles, on conçoit alors aisément que la mécanique classique n'est pas suffisante pour décrire la trajectoire de particules : la mécanique classique n'est pas capable de décrire, même qualitativement, les trajectoires observées (comme indiqué page 4 de l'article d'étude [BBSG93]).

### 3.1.2 Étude avec un modèle relativiste

Ici on va essayer d'étendre notre modèle au cadre de la relativité restreinte. Déjà on peut se demander si il est pertinent de le faire ? La réponse est oui car les particules entrant dans la chambre à bulles ont une très grande vitesse, cette vitesse représente un pourcentage significatif de la vitesse de la lumière et donc le facteur  $\gamma$  (que nous allons définir) n'est pas négligeable. Maintenant que nous savons qu'il est pertinent de le faire, il faut trouver un moyen logique de l'implémenter dans notre problème.

Bien évidemment n'ayant pas eu de cours de relativité restreinte, nous ne savons pas comment gérer un problème relativiste. Néanmoins, nous pouvons tenter de modifier nôtre PFD en un PFD relativiste (en suivant la méthode issue de [Sem21]). Pour ce faire il faut revenir à l'expression la plus générale du PFD :

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad (21)$$

avec  $\vec{\rho}$  le vecteur quantité de mouvement qui en mécanique classique vaut  $\vec{\rho} = m\vec{v}$  et il faut le remplacer dans (21) par le quadri-vecteur<sup>7</sup> quantité de mouvement  $\vec{\rho}_r = m\vec{v}\gamma$  avec  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  avec  $v$  la norme

---

7. Nous utilisons le terme de quadri-vecteur car c'est ce qui est utilisé en relativité restreinte. Le quadri-vecteur quantité de mouvement a quatre coordonnées : trois d'espace et une de temps car le temps n'est pas absolu en relativité restreinte. Pour autant nous supposons par la suite que le temps est absolu car nous ne savons pas gérer la quatrième composante de notre vecteur.

de la vitesse de la particule (cad.  $v := ||\vec{v}||$ ) et  $c$  la vitesse de la lumière.

Pour voir si l'on ne fait pas n'importe quoi, on peut vérifier que le quadri-vecteur quantité de mouvement a bien la même dimension que le vecteur quantité de mouvement. Pour cela il faut que  $\gamma$  n'ait pas de dimension.

$$[\gamma] = \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right] \quad (22)$$

$$[\gamma] = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L^2 \times T^{-2}}{L^2 \times T^{-2}}}} \quad (23)$$

$$[\gamma] = 1 \quad (24)$$

C'est bon on a bien le droit de remplacer  $\vec{\rho}$  par  $\vec{\rho}_r$ . Il faut maintenant le dériver.

$$\frac{d\vec{\rho}_r}{dt} = \frac{d}{dt} \{ m\vec{v}\gamma \} \quad (25)$$

$$= m\gamma\vec{a} + m\vec{v} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right\} \quad (26)$$

$$= m\gamma\vec{a} - \frac{1}{2}m\vec{v} \left( \frac{-2\dot{v}v}{c^2} \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \right) \quad (27)$$

$$= m\gamma\vec{a} + m\vec{v} \frac{v\dot{v}}{c^2} \gamma^3 \quad (28)$$

L'équation obtenue est bien homogène, nous pouvons désormais réécrire le PFD :

$$m\gamma\vec{a} + m\vec{v} \frac{v\dot{v}}{c^2} \gamma^3 = q\vec{v} \wedge \vec{B} - \alpha\vec{v} \quad (29)$$

$$m\gamma \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} + m \frac{\gamma^3}{c^2} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{2\dot{x}\dot{x} + 2\dot{y}\dot{y}}{2\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = qB \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Comme la dernière fois on a pas de mouvement selon z donc on projette uniquement selon x et selon y :

$$m\gamma\ddot{x} + m \frac{\gamma^3}{c^2} \dot{x}(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}) = qB\dot{y} - \alpha\dot{x} \quad (31)$$

$$m\gamma\ddot{y} + m \frac{\gamma^3}{c^2} \dot{y}(\dot{x}\dot{x} + \dot{y}\dot{y}) = -qB\dot{x} - \alpha\dot{y} \quad (32)$$

Les équations différentielles obtenues sont en accord avec [Sem21] (chapitre 9) et elles ont été vérifiées grâce à un module de programmation symbolique (c'est-à-dire qu'un ordinateur a vérifié tous les calculs).

Les deux équations différentielles (31) et (32) ne sont absolument pas linéaires. De plus elles sont couplées, c'est pourquoi nous ne sommes pas en capacité de les résoudre analytiquement. Néanmoins,

un raisonnement astucieux nous donne les informations que nous souhaitons. Grâce à un tel raisonnement, nous n'avons pas besoin de savoir résoudre analytiquement (ou même numériquement) les équations différentielles couplées obtenues. Nous verrons cela dans la partie 3.2.1. Une autre approche est également possible : utiliser une approximation par ordinateur pour les résoudre. Toutefois, plusieurs problèmes se sont posés à nous :

- ici, le système international ne nous permet pas de calculer précisément les solutions car les écarts sont trop grands : de l'ordre de  $10^{40}$  entre la vitesse de la lumière et la masse d'une particule. C'est pourquoi nous nous placerons dans le système d'unités atomiques. Autrement, à moins d'utiliser des modules spécialisés de calcul scientifique, le calcul à virgule flottante ou le dépassement de capacité joueraient contre nous (et nous avons eu de sacrées surprises...).
- Python est globalement mauvais et lent. Nous avons eu le droit à un florilège d'erreurs ou d'avertissements nous renseignant sur les limites de python. Par exemple :

```
DecompressionBombWarning: Image size (92078041 pixels)
exceeds limit of 89478485 pixels , could be decompression
bomb DOS attack .
SystemError: excessive stack use: stack is 3285 deep .
```

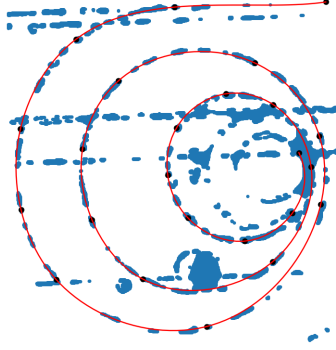
Que faire désormais des équations du mouvement ? C'est ce que nous allons voir tout de suite.

### 3.2 Détection de particules chargées par analyse de trajectoire

Énonçons très clairement ce que nous voulons : détecter des particules par un raisonnement analytique. Plus précisément, des équations du mouvement précédemment obtenues (19, 20, 31, 32), est-il possible d'obtenir des relations donnant la valeur de la masse  $m$  et de la charge  $q$  (en fonction de la position/la vitesse,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $B$ ,  $\gamma$ ) ? À quoi cela servirait-il ? Par l'étude de photographies du passage de particules au sein d'une chambre à bulles, nous obtenons la trajectoire de ladite particule. La finalité n'est aucunement de connaître précisément la trajectoire, nous l'avons déjà expérimentalement et nous avons su dériver les équations du mouvement. Nous voulons détecter des particules par l'analyse de leur trajectoire.

Notre cheminement pour détecter analytiquement des particules s'articule ainsi :

- **Première étape.** Sur des photographies de trajectoires de particules au sein d'une chambre à bulles, interpoler la trajectoire de la particule. Nous obtenons donc une modélisation du mouvement, par exemple :



- **Deuxième étape.** Dédire une relation portant sur  $m$  et  $q$  avec l'ensemble des autres variables du problème en se servant des équations (19, 20, 31, 32). Cette relation est déterminée grâce à la *méthode Riccati* 3.2.1, en voici un aperçu pour le cas classique (démonstré par la suite) :

$$\frac{m}{q} = B \frac{1 + Z(t)^2}{\dot{Z}(t)} \quad (33)$$

avec  $Z(t)$  une certaine fonction (que nous savons déterminer).

- **Troisième étape.** Calculer  $m$  et  $q$  (ou, plus précisément, le rapport masse sur charge) en se servant de la relation obtenue à l'étape 2 (équation 33) mais en injectant dans  $Z$  les données obtenues expérimentalement à l'étape 1 à la place des solutions analytiques du mouvement.

Dans la mesure où nous avons supposé qu'une particule est déterminée par sa masse et sa charge, il ne reste plus qu'à comparer notre rapport masse sur charge à des tables de valeur pour différentes particules. Il demeure tout de même une certaine incertitude (étant donné que l'on effectue un rapport et que les échelles de mesure que nous avons récupéré dans les images à analyser étaient très imprécises).

Voyons précisément comment faire cela.

### 3.2.1 La "méthode Riccati"

Dans le cadre classique, nous avons obtenu les équations du mouvement :

$$x(t) = -e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \omega_c \sin(\theta + \omega_c t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \cos(\theta + \omega_c t) \quad (34)$$

$$y(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \omega_c \cos(\theta + \omega_c t) - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} v_0 \sin(\theta + \omega_c t) \quad (35)$$

Il apparaît vraiment compliqué de trouver une relation entre  $m$ ,  $q$  et  $x$  et  $y$  (rappelons que  $\tau$  et  $\omega_c$  dépendent de  $m$  et  $q$ )<sup>8</sup>. Raisonnons plutôt sur les équations différentielles obtenues :

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y} - \frac{\alpha}{\tau} \dot{x} \quad (36)$$

$$\ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x} - \frac{\alpha}{\tau} \dot{y} \quad (37)$$

---

8. On pourrait trouver une relation sous condition d'utiliser les branches de la fonction spéciale  $W$  de Lambert, laissons cette idée de côté qui complique inutilement la situation.

Multiplions 36 par  $\dot{y}$  et 37 par  $\dot{x}$ , puis prenons-en la différence :

$$\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = \frac{qB}{m}(\dot{y}^2 + \dot{x}^2) - \frac{\alpha}{m}(\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x}) \quad (38)$$

Le second terme du côté droit de l'équation s'annule, divisons par  $\dot{y}^2$ , nous obtenons :

$$\frac{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}}{\dot{y}^2} = \frac{qB}{m} \frac{\dot{y}^2 + \dot{x}^2}{\dot{y}^2} \quad (39)$$

On reconnaît immédiatement que le côté gauche de l'équation est égal à  $\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\dot{x}}{\dot{y}} \right\}$  et une simplification s'opère du côté droit. On pose  $Z(t) = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$ , on trouve finalement :

$$\dot{Z} = \frac{qB}{m} (1 + Z^2) \quad (40)$$

L'équation différentielle obtenue est une équation de Riccati, d'où le nom de la méthode.

Un maigre arrangement, donne :

$$\boxed{\frac{m}{q} = B \left( \frac{1 + Z^2}{\dot{Z}} \right)} \quad (41)$$

L'équation obtenue est parfaitement homogène : le terme de gauche ayant la dimension  $\frac{M}{T \cdot A}$  et le terme de droite :  $\frac{M \cdot T^{-2} \cdot A^{-1}}{T^{-1}}$ , exactement la même dimension que le terme de gauche.

Un tel raisonnement est-il possible dans le cadre de la mécanique relativiste ? Oui et nous allons voir comment faire. La démarche est exactement la même, à la simple différence que l'on effectue un changement de variable ( $X = \dot{x}$  et  $Y = \dot{y}$ ) qui va abaisser l'ordre des équations différentielles, elles deviennent donc :

$$m\gamma\dot{X} + m\frac{\gamma^3}{c^2}X(\dot{X}X + \dot{Y}Y) = qBY - \alpha X \quad (42)$$

$$m\gamma\dot{Y} + m\frac{\gamma^3}{c^2}Y(\dot{X}X + \dot{Y}Y) = -qBX - \alpha Y \quad (43)$$

La seule différence avec le cas classique est la présence du terme  $\gamma$ . En multipliant 42 par  $Y$  et 43 par  $X$ , puis en en prenant la différence, on obtient :

$$m\gamma(\dot{X}Y - \dot{Y}X) = qB(Y^2 + X^2) \quad (44)$$

On divise par  $Y^2$  et l'on reconnaît immédiatement la même identité différentielle que précédemment. On introduit alors la fonction  $Z(t) = \frac{X}{Y}$ . On trouve donc :

$$m\gamma\dot{Z} = qB(1 + Z^2) \quad (45)$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{m}{q} = \frac{B}{\gamma} \left( \frac{1 + Z^2}{\dot{Z}} \right)} \quad (46)$$

L'équation obtenue n'est plus une équation de Riccati. Plus généralement, le terme  $\gamma$  est dépendant du temps et rend encore plus non linéaire l'équation.

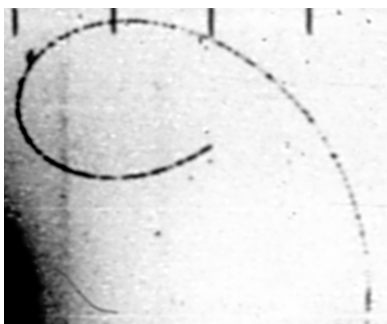
Remarquons que nous perdons toute dépendance avec  $\alpha$  (le coefficient de frottement fluide). Notre modèle ne dépend alors aucunement du milieu (c'est-à-dire du liquide métastable), ce qui rend notre modèle encore moins correct.

### 3.2.2 Comparaison théorique – expérimentale

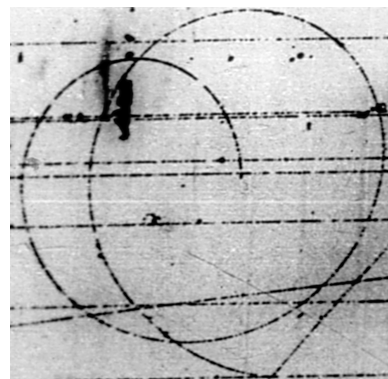
Éprouvons notre modèle sur six exemples :



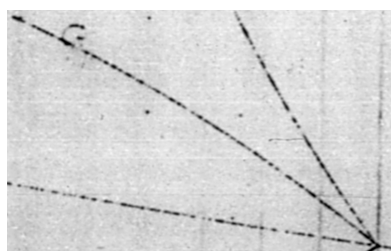
(a)



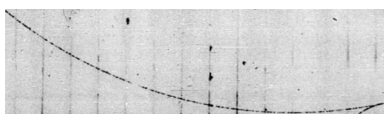
(b)



(c)



(d)



(e)



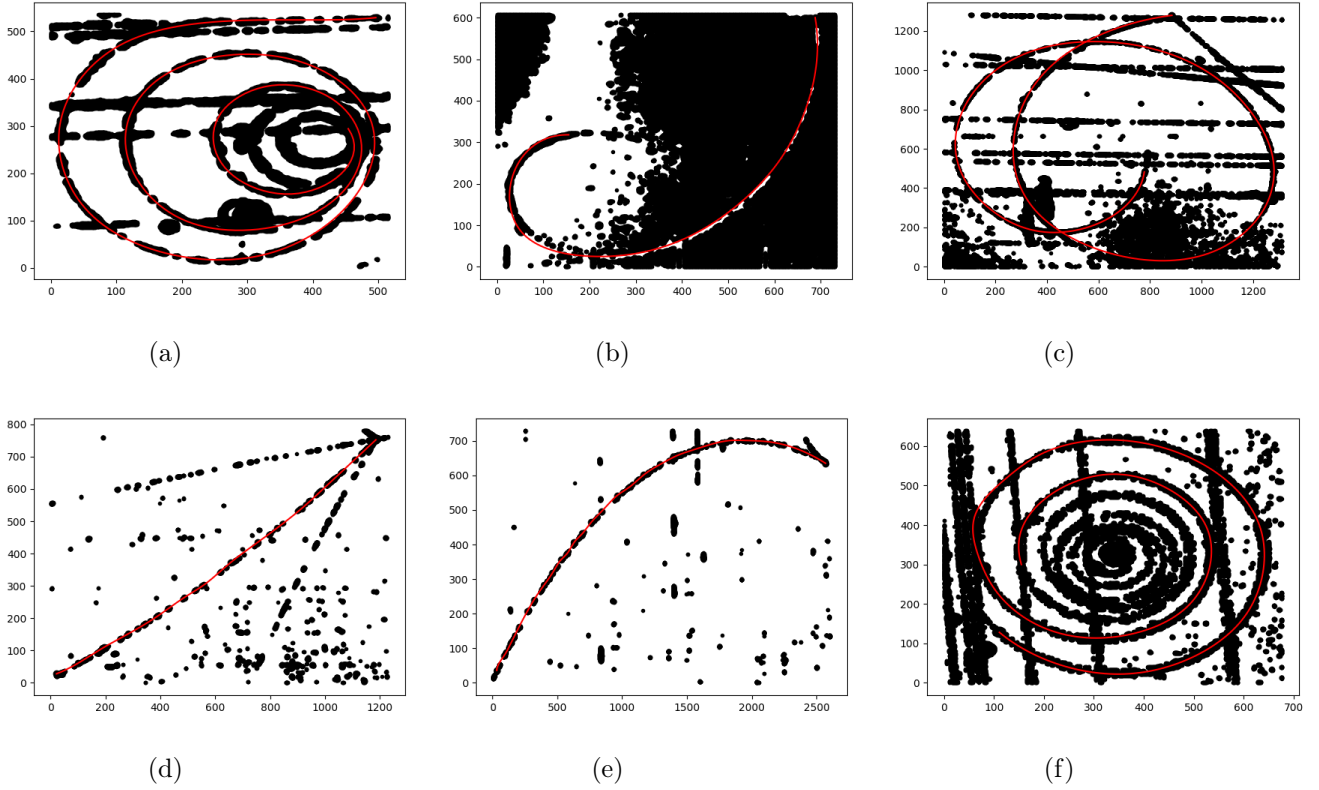
(f)

On commence par générer les trajectoires interpolées (**étape 1**)<sup>9</sup> :

---

9. Théoriquement, nous devrions considérer un rapport d'agrandissement comme dans la partie 2.5. Grâce à la *méthode Riccati*, nous raisonnons sur des rapports (de position, de vitesse), donc le terme d'agrandissement est superflus.





Dans la partie 3.2.1, on a trouvé une relation classique (41) et une relation relativiste (46). Grâce aux points interpolés, on calcule le **rapport masse sur charge** en chaque point de la trajectoire puis on en prend la moyenne afin d'avoir une valeur plus ou moins fiable (**étape 2** et **étape 3**). Voici les résultats (en kg/C) :

	classique	relativiste (0.1c, 0.99c)	relativiste (modèle)
(a)	-9.792067046685643	-9.792067046651212, -1.381341045227812	-5.021604589136478
(b)	80.3631584770906	79.9603330909135, 11.33661859128366	4.423352083858184
(c)	2230.186782338283	2219.0078308278285, 314.60656123786777	1784.1494258706275
(d)	-38.276352540036996	-38.08448991560071, -5.399543995469133	-4.186670170354276
(e)	-242.13455453110188	-240.9208398478542, -34.15728232324268	-2.421315278299895
(f)	6810.573755099996	6776.435325812552, 960.7496583323733	992.1361626538778

Pour chaque cas relativiste, on propose deux valeurs moyennes : l'une pour laquelle la vitesse est de l'ordre d'un dixième de celle de la lumière et l'autre de l'ordre de 99% de la vitesse de la lumière. Ceci nous fournit un intervalle d'ordre de grandeur. On affiche ensuite la valeur calculée par notre modèle.

Il ne reste alors plus qu'à comparer les valeurs obtenues avec une table de valeurs expérimentales ([Gre10]) :

**Table 1. Mass in MeV/c<sup>2</sup> for all fundamental elementary particles (modified from [6]). The particle variant with the longest lifetime is printed in bold.**

Particle	charged	neutral	
<b>LEPTONS</b>			
<b>Electron</b>	0.511 (-)		
<b>Muon</b>	105.66 (-)		
<b>Tau</b>	1776.99 (-)		
<b>MESONS</b>			
<b>Pion</b>	139.57 (+/-)	134.98	
<b>Kaon</b>	493.68 (+/-)	497.65	Ks <sup>0</sup> and K <sub>L</sub> <sup>0</sup>
<b>Eta</b>		547.75	
<b>Rho</b>		775.8	
<b>Omega</b>		782.59	
<b>D Meson</b>	1869.4 (+/-)		
<b>Ds Meson</b>	1968.3 (+/-)		
<b>B Meson</b>	5279.0 (+/-)	5279.4	
<b>Bs Meson</b>		5369.6	
<b>BARYONS</b>			
	<b>positive</b>	<b>neutral</b>	<b>negative</b>
<b>Nucleon</b>	938.27	939.56	
<b>Lambda</b>		1116.68	
<b>Sigma</b>	1189.37	1192.64	<b>1197.45</b>

Il apparaît alors sans conteste que l'image (a) représente un électron. Pour les autres, des précautions doivent être prises. Par exemple, l'image (b) pourrait représenter un pion chargé positivement. Cette idée concorde avec des analyses du CERN [CER02]. La (c) semble faire penser à un certain type de méson, mais nous ne pouvons pas trop nous avancer. Néanmoins, le modèle relativiste nous conforte grandement dans cette idée. En effet, on obtient un rapport  $m/q$  relativiste valant environ 1784 kg/C. La valeur relativiste est plus proche des valeurs théoriques (environ 1800 à 1950 kg/C pour certains mésons). En revanche, la (d) semble plus certaine : un muon (cela semble concorder avec l'analyse faite dans [Ahm15] mais la valeur relativiste n'est pas rassurante). L'image (e) pourrait représenter un pion chargé négativement (ce qui concorde avec [BBSG93] mais la valeur relativiste n'est encore une fois pas rassurante). L'image (f) est en revanche problématique.

### 3.2.3 Comparaison classique – relativiste

On suppose que les particules étudiées ont une vitesse non négligeable devant celle de la lumière, c'est-à-dire que l'on suppose que leur vitesse  $v$  vérifie :  $\frac{c}{10} < v < c$ .

La seule différence entre le modèle classique et le modèle relativiste réside dans le gamma, donc dans la vitesse : avec l'approche relativiste on a un terme qui va venir corriger l'expression classique en fonction de la vitesse (plus la vitesse va être importante, plus la correction va être grande)!

On conjecture que plus la particule est massive, moins notre méthode est susceptible de fonctionner.

Néanmoins, la conjecture semble quelque peu contredite par l'analyse de données, en particulier celle du méson (cas (c)). **Si le rapport masse charge est relativement faible et que la particule se déplace très rapidement, notre méthode ne semble pas être adaptée par rapport au cas classique (cas du muon et du pion chargé négativement ou positivement). Le  $\gamma$  provenant de la méthode Riccati semble donner une correction trop agressive dans de tels cas (particule véloce et de rapport  $m/q$  relativement petit). Une méthode plus fine serait préférable.**

## 4 Limites d'une chambre à bulles

Des premières limites purement matérielles s'imposent : une chambre à bulles est un gros instrument qui nécessite de la place, de la matière première (néon, hydrogène liquide...) en quantité impressionnante (plusieurs tonnes dans certains cas, comme par exemple pour celle de deux mètres du CERN). Le rendement n'est que très peu adapté en comparaison de l'encombrement d'un tel instrument de détection. Les tests sont difficilement automatisables et une grande main d'œuvre est nécessaire pour analyser les images produites (du moins était-ce le cas dans les années 60, lorsque l'informatique n'en était qu'à ses balbutiements). De manière générale, une chambre à bulles nécessite de lourds investissements.

Un problème théorique s'ajoute. Dans la mesure où est utilisé un champ magnétique, on s'attend à ne pas pouvoir détecter de particules neutres. En effet, la force émanant de la particule étant  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Si  $q = 0$ , la force est nulle. Ainsi, le champ magnétique n'aurait aucun effet sur le mouvement de la particule. Néanmoins, et à notre grand étonnement, des physiciens des particules ont su mettre au point de nouvelles générations de chambres à bulles pour détecter des particules neutres (projet Gargamelle [CER70] pour détecter des neutrinos par exemple en utilisant du fréon et non de l'hydrogène liquide et en raisonnant de manière indirecte plutôt qu'en tentant des observations directes).

## 5 Conclusion

Notre modèle est très loin d'être parfait, nous négligeons les effets quantiques, les effets de la nucléation ou les diverses propriétés particulières que pourraient avoir les liquides métastables.

Même notre approche relativiste, que nous espérons juste (ou plutôt pas trop fausse), bien qu'enrichissante, est encore sûrement loin de ce qu'on aurait pu faire avec une connaissance plus étendue de la relativité restreinte (en ayant suivi un cours complet, par exemple).

Néanmoins nous pouvons quand même en tirer deux choses, la première est que même si nous avons l'impression de négliger une grande quantité d'effets, parfois, notre modèle est surprenamment

proche de la réalité... toutes proportions gardées bien sûr. La deuxième chose est dans la continuité de la première : il vaut mieux bien maîtriser les choses qu'on utilise pour pouvoir détecter les erreurs ou trouver des méthodes astucieuses comme la méthode Riccati. Nous avons donc choisi de ne pas être trop ambitieux (une modélisation de désintégrations de particules élémentaires fut envisagée, mais bien trop complexe). Et il ne faut pas être déçu même si c'est frustrant d'utiliser des méthodes sous-optimales plutôt que la méthode à la pointe (si on ne maîtrise pas cette dernière, ce qui est notre cas).

Pour finir nous pouvons dire que ce projet a été extrêmement enrichissant. Il nous a poussé à découvrir des nouvelles choses comme les équations de Riccati ou encore la relativité restreinte.

Raphaël, physicien éperdu, va continuer à s'intéresser à la relativité restreinte et étudie l'ouvrage *Relativité Restreinte : Des Particules à L'astrophysique* d'Éricourgoulhon. Mathias, mathématicien éperdu, souhaite s'intéresser aux équations différentielles non linéaires.

## Références

- [Adv21] Advanced Undergraduate Laboratory, Department of Physics, University of Toronto. Hep : High energy physics photographs. <https://www.physics.utoronto.ca/~phy326/hep/>, 2021. Consulté le 07 décembre 2022.
- [Ahm15] Syed Naeem Ahmed. 4 - liquid-filled detectors. In Syed Naeem Ahmed, editor, *Physics and Engineering of Radiation Detection (Second Edition)*, pages 233–258. Elsevier, second edition edition, 2015.
- [BBSG93] L. Bettelli, M. Bianchi-Streit, and G. Giacomelli. Particle physics with bubble chamber photographs. *CERN*, 1993.
- [CER70] CERN. Gargamelle. <https://home.cern/science/experiments/gargamelle>, 1970. Consulté le 21 décembre 2022.
- [CER77] CERN. Photographs of the particle tracks in a bubble chamber. <http://cds.cern.ch/record/2809280>, 1977. Consulté le 07 décembre 2022.
- [CER02] CERN. Decay of  $\pi^+$ . <https://hst-archive.web.cern.ch/archiv/HST2002/Bubblech/piplus.html>, 2002. Consulté le 21 décembre 2022.
- [Cha32a] J. Chadwick. Possible existence of a neutron. *Nature*, 1932.
- [Cha32b] James Chadwick. The existence of a neutron. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 136(830) :692–708, 1932.
- [CSM12] B. Chatterjee, Rupa Sarkar, and Prasanna Mondal. The limiting temperature of the superheated liquid state. *Science and culture*, 78 :448–454, 09 2012.

- [ES55] A. Einstein and M. Solovine. *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement : Nouv. tirage*. Gauthier-Villars, 1955.
- [Gia06] Giorgio Giacomelli. Introduction to the workshop, 30 years of bubble chamber physics, 2006.
- [Gol13] Maurice Goldman. La découverte des électrons. *Institut de France, Académie des Sciences*, 2013.
- [Gre10] Karl Greulich. Calculation of the masses of all fundamental elementary particles with an accuracy of approx. 1. *J. Mod. Phys*, 1 :300–302, 01 2010.
- [Har88] Gert Harigel. Nucléation dans les chambres à bulles. *La houille blanche*, 1988.
- [JW19] Floria Naumann Julia Woithe, Rebecca Schmidt. Track inspection : how to spot subatomic particles. *Teach physics, Science in School*, 46, 2019.
- [Rud16] Thomas Rudzki. Invention of the bubble chamber, 2016.
- [Rut11] E. Rutherford. The scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  particles by matter and the structure of the atom. *Philosophical Magazine*, 1911.
- [Sem21] Claude Semay. *Relativité restreinte*. Sciences sup Physique, 4e édition edition, 2021.
- [Ten63] A.G. Tenner. Nucleation in bubble chambers. *Nuclear Instruments and Methods*, 22 :1–42, 1963.
- [Tho04] J.J. Thomson. On the structure of the atom : an investigation of the stability and periods of oscillation of a number of corpuscles arranged at equal intervals around the circumference of a circle ; with application of the results to the theory of atomic structure. *Philosophical Magazine*, 1904.
- [Wik] Wikipedia. 30 cm bubble chamber (cern).
- [Wil97] Charles Wilson. Condensation of water vapour in the presence of dust-free air and other gases. *Royal Society*, 1897.
- [Wil99] Charles Wilson. On the condensation nuclei produced in gases by the action of röntgen rays. uranium rays, ultra-violet light, and other agents. *Royal Society*, 1899.