Noyau, Image, Pseudo-inverse
Et une propriété universelle !

Garnier

24 octobre 2023

Soit E un espace vectoriel de dimension quelconque et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Définition 1. *On dit que $g \in \mathcal{L}(E)$ est un* ***pseudo-inverse*** *de f si :*

$$f \circ g = g \circ f,\ f \circ g \circ f = f, \text{ et } g \circ f \circ g = g.$$

L'endomorphisme f est alors dit ***pseudo-inversible*** *s'il admet un pseudo-inverse.*

Par la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on se permet de simplifier la notation $f \circ g$ en fg.

On se propose de résoudre un exercice sur le **pseudo-inverse d'Azumaya-Drazin**. Nous allons prouver le théorème 1. On en profitera pour prouver des résultats intermédiaires ou auxiliaires qui permettent d'éclairer la situation.

Théorème 1. *L'endomorphisme f est pseudo-inversible si et seulement si* $\ker(f) = \ker(f^2)$ *et* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

1. ***Montrer que si f est pseudo-inversible, il admet un unique pseudo-inverse que l'on notera $f^\sharp$.*** Procédons par l'absurde et supposons que f admette deux pseudo-inverses différents g et g'. La propriété de commutativité de f et g' nous assure que $fg' = g'f$. Composons par g' puis utilisons la deuxième propriété des pseudo-inverses : $g'fg' = g'g'f = g'g'fgf$. Développons et réarrangeons : $g'g'fgf = g'fg'fg = g'fg$. Ainsi $g' = g'fg$. On conclut alors à une absurdité en remarquant que :

$$g' = g'fg = g'fgfg = fg'fgg = fgg = gfg = g.$$

Contradiction. Un pseudo-inverse est unique (s'il existe).

2.a) ***Monter que si f est inversible, alors il est pseudo-inversible. Déterminer son pseudo-inverse $f^\sharp$.*** On rappelle que f est inversible si et seulement si il existe un élément g de $\mathcal{L}(E)$ tel que $gf = \mathrm{Id}$ et $fg = \mathrm{Id}$. Nous n'allons montrer qu'une des deux égalités, l'autre se montre de manière similaire. Supposons que le pseudo-inverse de f soit l'inverse au sens usuel (un tel inverse existe car f est supposée inversible). Il ne reste qu'à vérifier qu'un tel pseudo-inverse convient :

- $ff^{-1} = \mathrm{Id} = f^{-1}f$,
- $ff^{-1}f = f \circ \mathrm{Id} = f$, et
- $f^{-1}ff^{-1} = f^{-1} \circ \mathrm{Id} = f^{-1}$.

2.b) *Même question si désormais f est un projecteur.* Rappelons qu'un projecteur f vérifie, par définition, $f^2 = f$. Nous allons montrer que le pseudo-inverse d'un tel f est lui-même. Vérifions que les inégalités soient bien satisfaites avec un tel choix :

— $ff = ff$, et

— $fff = ff = f$ ce qui suffit à remplir les deux dernières conditions de la définition 1.

3. *Plus généralement, on suppose que* $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$***. Montrer que f est pseudo-inversible.*** Une vraie horreur cette question. Impossible sans cette fameuse indication : *on pourra utiliser la propriété universelle de la somme directe pour définir $f^\sharp$ séparément sur* $\ker(f)$ *et* $\mathrm{Im}(f)$, *après avoir remarqué que f induisait un automorphisme de* $\mathrm{Im}(f)$. Bon, essentiellement, on découvre... Suivons les indications !

Lemme 1. *Dans les conditions de l'énoncé, la restriction de f à* $\mathrm{Im}(f)$ *induit un automorphisme de* $\mathrm{Im}(f)$.

Démonstration. Jusqu'alors, nous savons simplement que la restriction de f, notée par la suite $\tilde{f}$, est un endomorphisme. Nous devons montrer que $\tilde{f}$ est un isomorphisme. La surjectivité est tout d'abord évidente car l'image de l'application $\tilde{f}$ est égale à elle-même. Reste à montrer l'injectivité. Soit $x \in \ker(\tilde{f})$. Nous savons que x est également un élément un $\mathrm{Im}(\tilde{f})$ (rappelons sommairement que $\mathrm{Im}(\tilde{f})$ est également le domaine de définition de $\tilde{f}$). N'oublions pas que nous avions supposé $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$ donc *a fortiori* que $\ker(\tilde{f}) \cap \mathrm{Im}(\tilde{f}) = \{0\}$. On en conclut alors que $\ker(\tilde{f}) \subset \{0\}$. En conclusion $\ker(\tilde{f}) = \{0\}$, donc $\tilde{f}$ est injective et par là même bijective (comme désiré). □

Nous disposons donc d'un automorphisme de $\mathrm{Im}(f)$. Étant un automorphisme, il est inversible donc *a fortiori* pseudo-inversible en vertu de la question *2.a)*. Le problème est "réglé" sur l'image de f.

Le problème se poursuit... Il faut comprendre comment se servir de cette "propriété universelle de la somme directe" (chose toute nouvelle pour moi). Un document semblant présenter cela d'une manière fort agréable est venu m'éclairer. (Un petit coup d'oeil au livre d'Ibrahim Assem chez Calvage & Mounet ne semble rien donner.)

L'idée va être de travailler au corps et séparément le noyau ainsi que l'image. Il faudra ensuite réussir à "recoller l'information" pour obtenir une information non plus simplement sur $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ pris séparément mais bien sur $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Expliquons en quoi consiste la propriété universelle de la somme directe (il semblerait que ces histoires de propriétés universelles, problèmes universels... aient un langage commun dans lequel ils s'expriment agréablement : la théorie des catégories).

Proposition 1. *(La proposition n'est pas énoncée dans toute sa généralité, on se restreint au cas présent.) Soient $h_1 : \ker(f) \to E$ et $h_2 : \mathrm{Im}(f) \to E$. Il existe une unique application linéaire $u : \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \to E$ telle que $h_1 = u\iota_{\ker(f)}$ et $h_2 = u\iota_{\mathrm{Im}(f)}$. La situation est résumée dans le diagramme ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[dr, "\iota_{\ker(f)}"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \mathrm{Im}(f) \arrow[dl, "\iota_{\mathrm{Im}(f)}"'] \arrow[ddl, bend left, "h_2"] \\
& \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) \arrow[d, dashed, "u"] & \\
& E &
\end{tikzcd}$$

On remarque(rait si l'on faisait bien les choses) que $\ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ *est l'unique espace vectoriel avec une telle propriété.*

Précisons peut-être un peu qui sont ces applications ι_X $(X = \{\ker(f), \mathrm{Im}(f)\})$! Ce ne sont rien d'autre que les projections de l'espace de départ sur l'espace d'arrivée (un foncteur d'oubli ?). De ce fait, $\iota_{\ker(f)}$ est égal à $(x, 0)$ pour tout $x \in \ker(f)$ et $\iota_{\mathrm{Im}(f)}$ est égal à $(0, x)$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$.

Dans la mesure où $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$, on peut refaire le diagramme sous la forme qui suit.

$$\begin{tikzcd}
\ker(f) \arrow[r, bend left, "\iota_{\ker(f)}"] \arrow[r, bend right, "h_1"'] & \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E \arrow[loop below, dashed, "u"] & \mathrm{Im}(f) \arrow[l, bend right, "\iota_{\mathrm{Im}(f)}"'] \arrow[l, bend left, "h_2"]
\end{tikzcd}$$

4. ***Le but de cette question est de montrer la réciproque de la question précédente. On suppose désormais f pseudo-inversible.***

4.a) ***Monter que $ff^\sharp$ est un projecteur, de noyau*** $\ker(f^\sharp)$ ***et d'image*** $\mathrm{Im}(f)$***. Qu'en déduit-on ?*** Remarquons tout d'abord que si f est inversible, en vertu de la question 2, la réponse est évidente. Dans notre cas, f n'est pas supposée inversible mais pseudo-inversible.

L'application $ff^\sharp$ est effectivement un projecteur, comme on le vérifie :

$$(ff^\sharp)^2 = f \underbrace{f^\sharp f f^\sharp}_{f^\sharp} = ff^\sharp.$$

Reste à déterminer le noyau et l'image d'une telle application.

— Noyau de $ff^\sharp$: Montrons que $\ker(ff^\sharp) = \ker(f^\sharp)$. Il est tout d'abord évident que $\ker(f^\sharp)$ est contenu dans $\ker(ff^\sharp)$. Il reste alors à montrer que $\ker(ff^\sharp) \subset \ker(f^\sharp)$. Soit $x \in \ker(ff^\sharp)$, alors $ff^\sharp(x) = 0$. En composant par $f^\sharp$, on obtient que $f^\sharp(x) = f^\sharp ff^\sharp(x) = f^\sharp(0) = 0$. Donc x est un élément de $\ker(f^\sharp)$, ce qui permet de conclure.

— Image de $ff^\sharp$: On souhaite désormais prouver que $\mathrm{Im}(ff^\sharp) = \mathrm{Im}(f)$. Il est (de nouveau) évident que $\mathrm{Im}(ff^\sharp)$ est contenu dans $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(ff^\sharp)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $y \in E$ tel que $x = f(y)$. En composant par $f^\sharp$, on obtient que $f^\sharp(x) = f^\sharp f(y)$. On compose ensuite par f et finalement :

$$f^\sharp f(x) = ff^\sharp f(y) = f(y) = x.$$

Ainsi, x est un élément de $\mathrm{Im}(ff^\sharp)$, ce qui achève la preuve.

Grâce à la question précédente, nous sommes armés pour traiter avec des projecteurs ! On sait que son pseudo-inverse est lui même. Par voie de conséquence, l'image et le noyau de $ff^\sharp$ et de son pseudo-inverse sont les mêmes.

4.b) *Montrer que* $E = \ker(f) \oplus \operatorname{Im}(f)$. Commençons par montrer que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$. Il est (de nouveau) évident que $\{0\}$ est contenu dans $\ker(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. Démontrons alors que $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f) \subset \{0\}$. Soit un élément x de $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Si l'on compose $f(x) = 0$ par $f^\sharp$, on obtient : $f^\sharp f(x) = f^\sharp(0) = 0$. De plus, on sait qu'il existe un élément de E nommé y tel que $x = f(y)$, composons par $f^\sharp$ une nouvelle fois : $f^\sharp(x) = f^\sharp f(y)$. Si l'on réunit les informations, on remarque qu'en composant par f :

$$0 = f^\sharp f = ff^\sharp(x) = ff^\sharp f(y) = f(y).$$

On a évidemment utilisé les propriétés des pseudo-inverses. En conclusion, on a démontré que y est un élément de $\ker(f)$. Or, $x = f(y)$, ce qui impose la valeur de 0 à x. En définitive, le sous-espace vectoriel $\ker(f) \cap \operatorname{Im}(f)$ est réduit à $\{0\}$.

Il faut maintenant établir que $E = \ker(f) + \operatorname{Im}(f)$. Soit $x \in E$, on veut montrer que $x = x_1 + x_2$ avec x_1 un élément de $\ker(f)$ et x_2 un élément de $\operatorname{Im}(f)$. On remarque que $ff^\sharp(x) \in \operatorname{Im}(ff^\sharp) = \operatorname{Im}((ff^\sharp)^2)$ (l'égalité est due au fait que $ff^\sharp$ soit un projecteur). De plus, il existe y dans E tel que $ff^\sharp(x) = ff^\sharp(y)$. Montrons que l'on peut écrire x sous la forme $x_1 + x_2 = (x - ff^\sharp(y)) + (ff^\sharp(y))$. On remarque tout d'abord que $x_2 = ff^\sharp(y)$ est un élément de $\operatorname{Im}(ff^\sharp)$ donc *a fortiori* de $\operatorname{Im}(f)$ (en raison de la réponse à la question précédente). Il reste à montrer que $x_1 = x - ff^\sharp(y)$ est un élément de $\ker(f)$. Pour ce faire, composons par $ff^\sharp$, on remarque alors que :

$$ff^\sharp(x_1) = ff^\sharp(x - ff^\sharp(y)) = ff^\sharp(x) - (ff^\sharp)^2(y) = 0.$$

Ainsi, $x_1 \in \ker(ff^\sharp) = \ker(f^\sharp) = \ker(f)$. Ce qui conclut.

5. *Démontrer le théorème 1.* Drôle de coïncidence (ou pas), j'avais traité une question relativement similaire en partiel la veille... Nous allons avoir besoin des lemmes suivants :

Lemme 2. *Soit u un endomorphisme, alors $\ker(u) = \ker(u^2)$ si et seulement si $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.*

Démonstration. La preuve de ce lemme et du suivant émane de la correction d'un partiel (L1 S2). On procède par double implication :

- $\ker(u) = \ker(u^2) \Longrightarrow \ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. Supposons que $\ker(u) = \ker(u^2)$. Soit x un élément de $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u)$, montrons que $x = 0$. Comme $x \in \operatorname{Im}(u)$, il existe y dans E tel que $x = u(y)$. Comme $x \in \ker(u)$, $0 = u(x) = u^2(y)$. Donc $y \in \ker(u^2)$. Or, par hypothèse, $\ker(u^2) = \ker(u)$, alors $y \in \ker(u)$. En conséquence, $0 = u(y) = x$. Ainsi $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$.
- $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\} \Longrightarrow \ker(u) = \ker(u^2)$. Supposons désormais que $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. Il est toujours vrai que $\ker(u) \subset \ker(u^2)$, il reste donc à montrer que $\ker(u^2)$ est contenu dans $\ker(u)$. Soit $x \in \ker(u^2)$, alors $0 = u^2(x) = u(u(x))$. Donc $u(x) \in \ker(u)$. Mais $u(x) \in \operatorname{Im}(u)$, donc $u(x)$ est un élément de $\ker(u) \cap \operatorname{Im}(u) = \{0\}$. Ce qui implique que $u(x) = 0$, donc que $x \in \ker(u)$, comme désiré.

□

Lemme 3. *L'égalité $\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Im}(u^2)$ est satisfaite si et seulement si $\ker(u) + \operatorname{Im}(u) = E$.*

Démonstration. On procède de nouveau par double implication :

— $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2) \Longrightarrow \ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E$. Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Donc, il existe $y \in E$ tel que $u(x) = u^2(y)$. Posons $x_1 = u(y)$ et $x_2 = x - u(y)$, alors : $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Im}(u)$ par définition et $u(x_2) = u(x - u(y)) = u(x) - u^2(y) = 0$ donc $x_2 \in \ker(u)$. Ainsi, $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$.

— $\ker(u) + \mathrm{Im}(u) = E \Longrightarrow \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(u^2)$. Supposons que $E = \ker(u) + \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe y dans E tel que $x = u(y)$. Comme E est la somme de $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$, alors il existe y_1 dans $\mathrm{Im}(u)$ et y_2 dans $\ker(u)$ tels que $y = y_1 + y_2$. Comme $y_1 \in \mathrm{Im}(u)$, il existe z dans E tel que $y_1 = u(z)$. Donc $y = u(z) + y_2$. Ainsi :

$$x = u(y) = u(u(z) + y_2) = u^2(z) + u(y_2) = u^2(z) + 0 = u^2(z).$$

Donc x appartient à $\mathrm{Im}(u^2)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(u^2)$. Comme par ailleurs on a toujours $\mathrm{Im}(u^2) \subset \mathrm{Im}(u)$, le résultat suit.

$\square$

En combinant les deux lemmes précédents, on remarque immédiatement qu'avoir $E = \ker(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est équivalent à avoir $\ker(f) = \ker(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$. Il ne reste plus qu'à utiliser la question 3 pour prouver que :

$$\ker(f) = \ker(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \Longrightarrow f \text{ est pseudo inversible},$$

et à utiliser le résultat de la question 4 pour prouver que :

$$f \text{ est pseudo inversible } \Longrightarrow \ker(f) = \ker(f^2) \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2).$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Profitons-en pour faire quelques remarques. Il semblerait que le sujet ENS Ulm-Sèvres 1988 soit sur le sujet (la question 8 m'interpelle en ce qu'elle semble donner une condition un peu moins restrictive). J'ai également remarqué que le Grifone semble traiter le sujet en appendice (A.5) dont voici un court extrait motivant :

> Le concept d'inverse généralisée a été introduit pour la première fois par Fredholm dans l'étude des opérateurs intégraux. Pour les matrices les premiers résultats importants ont été obtenus par E. H. Moore en 1920 qui a pu définir une notion d'inverse généralisée *unique* pour toute matrice à coefficients complexes. Ces résultats, qui n'avaient pas été publiés et n'avaient fait l'objet que d'une conférence, ont été retrouvés plus tard, sous des formes différentes par divers mathématiciens. En particulier, Penrose en 1955 a pu caractériser l'inverse généralisée de Moore par un système d'axiomes, ce qui en a facilité l'application à divers domaines des mathématiques.