

Approximation uniforme de fonctions continues : aspects analytique, algébrique et numérique

Hugo Garcia

Mathias Garnier

Raphaël Sala

dirigé par Philippe Monnier

Mai 2023

Résumé

Le sujet auquel nous sommes confrontés s'énonce comme suit "*d'après la définition du polynôme de Bernstein associé à une fonction, montrer qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est limite d'une suite de polynômes*".

Nous envisageons trois approches : l'une analytique, l'autre algébrique et la dernière numérique. Chacune ayant ses spécificités, nous les combinons afin d'avoir un point de vue plus étendu sur notre sujet.

La première partie construit intuitivement et de manière effective l'approximation uniforme d'une fonction continue sur un fermé borné. La méthode est néanmoins très *rigide* en ce qu'elle est spécifique aux techniques d'analyse sur le corps des nombres réels... Ladite méthode ne nous permet pas de nous poser beaucoup de questions sur la nature du résultat. C'est pourquoi nous réinterprétons ensuite le résultat dans un cadre plus vaste : celui des espaces vectoriels (réels enrichis d'un produit scalaire).

Le Calcul infinitésimal est l'apprentissage du
manierement des inégalités bien plus que des
égalités, et on pourrait le résumer en trois mots :
MAJORER, MINORER, APPROCHER.

Dieudonné, Calcul infinitésimal (1968)

Table des matières

1	Construction analytique d'approximation	1
1.1	Polynômes de Bernstein associé à une fonction	1
1.2	Théorème d'approximation uniforme de Weierstrass	2
1.3	Densité des fonctions polynomiales dans $C^0([a, b], \mathbb{R})$	4
2	Construction algébrique d'approximations par projection	4
2.1	Formulation du problème	5
2.2	Caractérisation de la projection orthogonale	6
3	Construction algorithmique de la meilleure approximation	7
3.1	Effet Runge	7
3.1.1	Erreur d'interpolation	8
3.1.2	Abscisses de Tchebychev	9
3.1.3	Résultat interpolation	10
3.2	Module de continuité	11
3.3	Lebesgue	12
3.4	Unicité de la meilleure approximation	13
3.5	Algorithme de Remes	14
4	Approximation numérique	15
4.1	Programmes	15
4.1.1	Visualisations numériques	15
4.1.2	Assistant de preuve – Lean	16
4.2	Améliorations	16
4.2.1	Développement asymptotique	16
4.2.2	Calcul symbolique	17

1 Construction analytique d'approximation

1.1 Polynômes de Bernstein associé à une fonction

Définition 1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et à valeurs dans \mathbb{R} , soit n un entier naturel. Les *polynômes de Bernstein associés à f* sont les polynômes suivants :

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Il n'est pas évident de voir en quoi de tels polynômes vont être utiles pour démontrer le théorème de Weierstrass. Une approche probabiliste serait nécessaire afin de comprendre pourquoi. Néanmoins, nous avons préféré mettre cette option de côté. Nous gagnerons en compréhension et en intuition à la fin de cette partie et lors de la suivante.

Pour démontrer le théorème 3, nous allons avoir besoin du calcul de plusieurs polynômes de Bernstein : $f_1 : x \mapsto 1$, $f_2 : x \mapsto x$ et $f_3 : x \mapsto x^2$.¹

Lemme 2. Soit n un entier naturel. On a les égalités suivantes :

$$B_n(f_1)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1, \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n}. \quad (2)$$

Démonstration. Le calcul de $B_n(f_1)(x)$ est une application directe de la formule du binôme de Newton. Le calcul de (2) est une conséquence directe de celui de $B_n(f_1)$, $B_n(f_2)$ et $B_n(f_3)$ en remarquant que $(x - k/n)^2 = x^2 + k^2/n^2 - 2xk/n$ et en utilisant la linéarité de la somme. Calculons donc d'abord $B_n(f_2)$. Pour cela, remarquons que $\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} B_n(f_2)(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x(x + (1-x))^{n-1} = x. \end{aligned}$$

1. Plus généralement, l'on peut se demander si l'on peut espérer une formule pour $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$. Nous n'avons pas su trouver une formule exacte, néanmoins en nous basant sur [eZG12] nous avons pu donner une estimation asymptotique. Un tel résultat nous sera numériquement très utile, nous en reparlerons ultérieurement.

Pour le calcul de $B_n(f_3)$, on décompose le calcul en remarquant que $k^2 = k^2 - k + k = k(k-1) + k$ et $k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} B_n(f_3)(x) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \left(k(k-1) + k \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2} x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2} x^2 + \frac{x}{n}. \end{aligned}$$

Dans le dernier calcul, on a utilisé le résultat de $B_n(f_2)$. Finalement :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \left(x - \frac{k}{n} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^n \left(x^2 + k^2/n^2 - 2xk/n \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= x^2 + \frac{n(n-1)}{n^2} x^2 + \frac{x}{n} - 2x^2 = \frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

□

Nous avons écrit un petit programme pour calculer le $B_n(f)$ pour une fonction f donnée. Par exemple, lorsque $f(x) = \exp(x) \sin(2x) + 3 \ln(1+x) - \ln(3-x)$, on obtient $B_3(f)(x)$:

$$\begin{aligned} &(-9 \ln(5) - 3 \exp(2/3) \sin(4/3) + \ln(3) + \exp(1) \sin(2) + 3 \exp(1/3) \sin(2/3) + 3 \ln(7) + 11 \ln(2))x^3 \\ &+ (-18 \ln(2) - 3 \ln(7) - 6 \exp(1/3) \sin(2/3) + 3 \ln(3) + 3 \exp(2/3) \sin(4/3) + 9 \ln(5))x^2 \\ &+ (-3 \ln(3) + 3 \exp(1/3) \sin(2/3) + 9 \ln(2))x - \ln(3). \end{aligned}$$

1.2 Théorème d'approximation uniforme de Weierstrass

Théorème 3 (Weierstrass, 1885). *Toute fonction f continue sur un segment I est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales $(B_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$.*

Démonstration. On utilise les [polynômes de Bernstein associés à \$f\$](#) , notés $B_n(f)$. On cherche à montrer que l'assertion suivante est vraie : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$, où $\|f\|_\infty := \sup_{x \in I} |f(x)|$.

Pour ce faire, introduisons la fonction $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$, avec I un fermé borné de \mathbb{R} et soit $\varepsilon > 0$.

En utilisant le lemme 2 (équation 1) et en factorisant, on remarque que :

$$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (3)$$

On prend alors la norme sup (également appelée **norme de la convergence uniforme**) du résultat obtenu. Puis en appliquant l'inégalité triangulaire, on trouve :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty = \sup_{x \in I} \left| f(x) - B_n(f)(x) \right| \leq \sum_{k=0}^n \sup_{x \in I} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (4)$$

Étant sur un fermé borné I , en appliquant le **théorème de Heine**, nous déduisons que la fonction f est uniformément continue. Rappelons tout de même la définition de l'uniforme continuité :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, |x - y| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon. \quad (5)$$

On utilise cette définition pour débiter la majoration de $\|f - B_n(f)\|_\infty$. Pour ce faire, on découpe *astucieusement* la somme en deux parties : la première est constituée des x tels que $|x - k/n| < \eta$ puis, la seconde est composée des x tels que $|x - k/n| \geq \eta$. On peut donc réécrire l'inégalité 4 :²

$$\begin{aligned} \|f - B_n(f)\|_\infty \leq & \sum_{|x - k/n| < \eta} \sup \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \\ & \sum_{|x - k/n| \geq \eta} \sup \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \end{aligned} \quad (6)$$

La première partie de la somme se majore de façon évidente. En effet, lorsque l'on a $|x - k/n| < \eta$, il en découle que $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \epsilon$ par uniforme continuité.

En revanche, la seconde partie de la somme est moins évidente à majorer ! Considérons donc le cas des x tels que $|x - k/n| \geq \eta$. En divisant par η et en mettant au carré, on obtient : $\frac{1}{\eta^2} |x - k/n|^2 \geq 1$. Étant donné que nous sommes sur un fermé borné, la fonction f est bornée et atteint ses bornes, sa borne sup est notée $\sup f$. On multiplie de chaque côté de l'inégalité précédemment obtenue par $2 \sup f$. En d'autres termes, on a obtenu :

$$\sup \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2 \sup f \leq \frac{2 \sup f}{\eta^2} |x - k/n|^2. \quad (7)$$

Il ne reste plus qu'à l'utiliser pour majorer la seconde partie de la somme :

$$\sum_{|x - k/n| \geq \eta} \sup \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{2 \sup f}{\eta^2} \sum_{|x - k/n| \geq \eta} \left| x - \frac{k}{n} \right|^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (8)$$

Or, étant donné que l'on étudie les x tels que $|x - k/n| \geq \eta$, l'on a $\left| x - \frac{k}{n} \right|^2 = \left(x - \frac{k}{n} \right)^2$.

Pour conclure, il reste à remarquer que la somme de droite de 8 est égale à $\frac{2 \sup f}{\eta^2} \frac{x(1-x)}{n}$ (par application du lemme 2). Or, on peut majorer $x(1-x)$ par $1/4$ (i.e. le maximum global de la fonction). On trouve donc finalement :

$$\left\| f - B_n(f) \right\|_\infty \leq \epsilon + \frac{\sup f}{2n\eta^2}. \quad (9)$$

Cette quantité peut être arbitrairement petite lorsque n tend vers plus l'infini (comme désiré). \square

2. Pour la suite, le sup portera toujours sur les x dans I . Pour alléger le texte, nous ne le notons pas.

1.3 Densité des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$

Sans aucun effort supplémentaire, nous pouvons reformuler le [théorème de Weierstrass](#) comme suit : *les fonctions polynomiales sont **denses** dans $(\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$* . Il convient de préciser le vocable utilisé³ mais l'on comprend très bien que les fonctions polynomiales "suffisent" pour **approcher uniformément** toute fonction réelle et continue (moyennant un passage à la limite).

Nos recherches nous ont permis de découvrir une généralisation du résultat précédent : le théorème de Müntz-Szász.

Théorème 4 ([Bur10]). *Soit $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante de nombres strictement positifs. L'espace vectoriel engendré par les fonctions $f_n : X \mapsto X^{\lambda_n}$ est dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_n}$ diverge.*

Outre le plaisir que peut provoquer un tel résultat, on peut être étonné de voir comment se combinent **algèbre linéaire** (espace vectoriel engendré), **analyse** (suite, somme, divergence) et **topologie** (densité). Plus que cela, il existe une **équivalence** ("si et seulement si") entre les propriétés d'objets de nature différente. L'existence d'un tel résultat nous motive à approcher le problème d'une nouvelle manière : via l'algèbre linéaire !

2 Construction algébrique d'approximations par projection

Nous venons de construire une suite de fonctions polynomiales approchant uniformément toute fonction de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Une telle démarche est néanmoins **limitée** et ne nous a pas permis de réellement cerner pourquoi les choses marchaient (pourquoi avoir l'**intuition** de construire tel objet ou faire tel calcul... nous avons simplement déroulé les calculs). L'approche algébrique que nous allons présenter permet de **prendre de la hauteur** et de prouver des **résultats plus généraux** non spécifiques aux méthodes d'analyse réelle.

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension quelconque, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et f un élément de E .

Problème 5. *Existe-t-il une suite d'éléments f_n de F convergeant uniformément vers f ? Si oui, la suite d'éléments f_n est-elle **unique** ? Est-elle **constructible** (en un sens à définir) ? Et plus encore, existe-t-il ce que l'on appellera une **meilleure approximation** de f ?*

On comprend alors que le [théorème de Weierstrass](#) correspond au cas où $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $F = \mathbb{R}_n[X]$. Nous avons précédemment démontré l'existence d'une suite d'éléments convergeant vers $f \in E$. Néanmoins, l'unicité ne fut même pas évoquée et la constructibilité non plus (elle fera

3. On dit qu'une partie A d'un espace E est **dense** dans E si, pour chaque élément x de E , il existe une suite d'éléments $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers x . Par exemple \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans \mathbb{R} .

précisément l'objet de la partie 3). Concernant l'optimalité de l'approximation, des tests numériques nous montrent que les polynômes de Bernstein convergent "lentement"⁴. Nous sommes donc en droit d'attendre que de "meilleures" approximations existent !

Notre but, dans cette partie, se décompose en deux temps : préciser et rendre rigoureuse la formulation du problème 5 (nous avons besoin d'*enrichir*, d'ajouter de la structure à nos espaces vectoriels) puis apporter des réponses (partielles) au problème. On va surtout démontrer que des choses sont possibles plutôt que donner un algorithme pour les réaliser.

2.1 Formulation du problème

Disposer uniquement d'espaces vectoriels n'est pas suffisant ! Nous souhaitons pouvoir **mesurer des longueurs** (sans quoi la définition des modes de *convergence* ne ferait pas sens, par exemple).

On appelle alors **norme** [Gri19, p. 233] toute application $\|\cdot\|_E : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $\|x\|_E = 0$ si et seulement si $x = 0$, avec $x \in E$,
2. $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, et
3. $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$, pour tout x, y de E .

À titre d'exemple, la définition de l'uniforme continuité dans E d'une fonction f s'énonce ainsi⁵ :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x, y \in I, \|x - y\| < \eta \implies \|f(x) - f(y)\| < \epsilon. \quad (10)$$

Seule la manière de mesurer les distances change !

Un espace vectoriel doté d'une norme s'appellera alors logiquement un **espace vectoriel normé**. Nous allons nous intéresser à un type très particulier d'espaces vectoriels normés : ceux dont la norme provient d'un **produit scalaire**. Cela nous permet d'introduire de tels objets et de nous rendre compte que nous ne connaissions jusqu'alors qu'un exemple de produit scalaire. En toute généralité [Gri19, p. 219], le **produit scalaire** $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de deux éléments x et y de E est une forme **bilinéaire** (linéaire en chaque argument), **symétrique** ($\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$) et est **défini positif** ($\langle x, x \rangle$ est positif et nul si et seulement si $x = 0$).

Remarque 6. *L'application $u(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme. En effet, la propriété 1 découle du fait que le produit scalaire est défini positif et la propriété 2 est conséquence du fait que le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique. L'inégalité triangulaire nécessite quant à elle l'inégalité de Cauchy-Schwarz (démontrée en Ana2).*

Définition 7 (Cas réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)). *Un espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire est dit **préhilbertien**. Si, de plus, un tel espace vectoriel normé est de dimension finie alors il est dit **euclidien**.*

4. Sous certaines hypothèses (de dérivabilité de f), la précision sera vue dans la partie 4.2.1.

5. Pour ne pas alourdir inutilement les expressions, on oubliera de noter l'indice E sur la norme.

Il est alors intéressant de procéder à une analyse *a posteriori* de la preuve du théorème d'approximation de Weierstrass : d'une suite de sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ nous avons construit un suite d'éléments convergeant vers un élément donné de E . Et si nous faisons la même chose dans un cadre plus abstrait ? Donnons nous un espace préhilbertien E quelconque et un élément f de cet espace. Notre problème est alors le suivant : construire une **filtration de E** , dont les éléments sont notés $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$, pour laquelle on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ (avec $f_n \in F_n$). C'est-à-dire que nous souhaitons construire une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces vectoriels euclidiens de E tels que $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset \dots \subseteq E$ et dont les éléments f_n de F_n convergent uniformément vers f .

Nous ne nous concentrerons désormais que sur le cas où $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $F_n = \mathbb{R}_n[X]$ (nous aurions pu pimenter un petit peu en nous appuyant sur le théorème de Müntz-Szász et en raisonnant sur $F_n = \mathbb{R}_{\lambda_n}[X]$ avec (λ_n) vérifiant le théorème 4). On décide de fixer la norme : celle de la convergence uniforme.⁶ On va prouver l'**existence d'un polynôme de meilleure approximation** dans un tel cas. Nous en aurons besoin dans la partie 3.4. Définissons formellement un tel objet.

Définition 8. *On dit que l'élément $g \in F = \mathbb{R}_n[X]$ est un **polynôme de meilleure approximation au sens de la norme uniforme** s'il vérifie : $\|f - g\|_\infty = \inf_{h \in F} \|f - h\|_\infty$.*

Nous allons voir en quoi la projection orthogonale permet de le caractériser.

2.2 Caractérisation de la projection orthogonale

Dans \mathbb{R}^n (pour n égal à 2 ou 3), nous sommes habitués à ce que la projection orthogonale nous donne la **plus courte distance entre un point et un ensemble** (une droite ou un plan). Tout cela est dû au théorème de Pythagore ! Montrons que l'on va pouvoir retrouver la même idée pour des espaces un petit peu plus compliqués...

Définition 9. *On appelle distance (selon la norme de la convergence uniforme) d'un point $f \in E$ à l'ensemble F la quantité suivante : $d(f, F) := \inf_{h \in F} \|f - h\|_\infty$.*

Définition 10. *On note F^\perp l'ensemble des vecteurs orthogonaux à F , c'est-à-dire l'ensemble des éléments x de E pour lesquels on a $\langle x, y \rangle = 0$ pour tout y de F .⁷ La **projection orthogonale sur F** , notée p_F , est la projection sur F parallèlement à F^\perp .*

Proposition 11. *En utilisant les mêmes notations, nous avons que :*

$$d(f, F) = \|f - p_F(f)\|_\infty. \tag{11}$$

6. Il pourrait être intéressant de voir ce que l'on peut obtenir sans fixer arbitrairement la norme.

7. On remarque que l'orthogonalité est celle usuelle, celle à laquelle nous sommes habitués.

Démonstration. On a que $f - g = (f - p_F(f)) + (p_F(f) - g)$. On cherche à montrer que $(f - p_F(f))$ et $(p_F(f) - g)$ sont orthogonaux afin de pouvoir appliquer le théorème de Pythagore. Pour ce faire, on remarque que $p_F(f) - g$ est dans F (ils le sont tous les deux et la différence est encore un élément de F), puis que $f - p_F(f) \in F^\perp$. Ainsi, nous trouvons que :

$$\|f - g\|_\infty^2 = \|f - p_F(f)\|_\infty^2 + \|p_F(f) - g\|_\infty^2 \geq \|f - p_F(f)\|_\infty^2. \quad (12)$$

L'inégalité ne peut devenir une égalité que si $g = p_F(f)$. Pour une telle valeur de g , nous avons obtenu la plus petite valeur de $\|f - h\|$, avec $h \in F$, c'est-à-dire, comme désiré, $d(f, F)$. \square

Le résultat précédent caractérise la projection orthogonale et nous renseigne même sur l'existence d'un polynôme de meilleure approximation ! En effet, d'une part, un élément g vérifiant $\|f - g\|_\infty = d(f, F)$ est de meilleure approximation. On a donc, essentiellement, $g = p_F(f)$. Ensuite, l'existence découle du fait que l'image de p_F soit non nulle... tout du moins car nous sommes en dimension finie. Le résultat suivant précise la situation.

Théorème 12 ([Mon23]). *Si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien et F un sous-espace vectoriel de dimension finie alors pour tout $f \in E$ il existe un unique vecteur de F , noté $p_F(f)$, qui vérifie $\|f - p_F(f)\| = d(f; F)$. Cet élément est le seul vecteur de F tel que $f - p_F(f)$ est orthogonal à F , on l'appelle la **projection orthogonale de f sur F** .*

La détermination du polynôme de meilleure approximation g se ramène donc à un calcul de projection orthogonale. Cette partie n'a malheureusement pas pu être approfondie et ne semble pas aisée à réaliser en pratique. C'est pourquoi nous nous intéressons à une autre construction de la meilleure approximation de f .

3 Construction algorithmique de la meilleure approximation

Au sein de cette section, nous travaillerons sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et nous verrons comment approximer au mieux une fonction à l'aide de polynômes. Nous aurions pu utiliser les **polynômes de Lagrange** : plus seraient donnés de points à interpoler, plus notre suite de polynômes serait convergente. Toutefois, peut se manifester un effet tout à fait fâcheux et inopportun.

3.1 Effet Runge

L'exemple historique de cet effet appartient à C. Runge avec la fonction $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$ sur $[-1; 1]$ avec des abscisses, des points, équidistantes (un choix pourtant intuitivement prometteur). Ce phénomène, présenté graphiquement (3.1.3), explique que l'interpolation d'une infinité de points ne mène pas nécessairement à un polynôme convergeant vers ladite fonction f . La preuve historique est longue et fastidieuse, celle-ci se trouve par exemple dans [Spe]. Une explication de ce phénomène provient de l'erreur d'interpolation qui n'est pas nécessairement bornée.

3.1.1 Erreur d'interpolation

Nous introduisons une nouvelle notation, les **différences divisées**, pour exprimer les polynômes de Lagrange différemment. Celle-ci permettra d'exprimer plus aisément le produit du théorème 15.

Définition 13 (Différences divisées). Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $n + 1$ couples de points distincts $((x_0, y_0) \dots (x_n, y_n))$ tels que $y_i = f(x_i)$. Alors on appelle différence divisée la quantité suivante :

$$[y_0, \dots, y_n] = \sum_{j=0}^n \frac{y_j}{\prod_{0 \leq i \leq n, i \neq j} (x_j - x_i)}.$$

Remarque 14 (Formule d'interpolation de Newton). Une reformulation des polynômes de Lagrange

$$\text{est : } p_n = \sum_{j=0}^n y_j \left(\prod_{i=0, i \neq j}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \right) = [y_0] + \sum_{k=1}^n \left([y_0, \dots, y_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right).$$

Théorème 15 (Erreur d'interpolation). Soient $f \in \mathcal{C}^m([a, b], \mathbb{R})$, $(x_0, \dots, x_n) \in [a, b]$ et p_n son polynôme interpolateur de degré n . Alors $\forall x \in [a, b]$, $\|f - p_n\|_\infty \leq \sup_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n)}|}{n!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|$.

Démonstration. La preuve se fera en 2 parties. Montrons qu'il existe un c tel que $[y_0, \dots, y_n] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

La fonction $f(x) - p_n(x)$ s'annule en $n + 1$ points (x_0, \dots, x_n) donc par application du théorème de Rolle n fois, nous obtenons qu'il existe un $c \in [a, b]$ tel que $(f - p_n)^{(n)}(c) = 0$. Ensuite on remarque que le coefficient du plus haut degré de p_n est $[y_0, \dots, y_n]$ (cf. remarque 14). Donc $f^{(n)}(c) = p_n^{(n)}(c) = n![y_0, \dots, y_n]$. Ainsi, $[y_0, \dots, y_n] = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}$.

Passons à la seconde étape, soient q un polynôme de degré $n + 1$ interpolant les $(x_0, \dots, x_n) \in [a, b]$ et un réel $x_\phi \in [a, b]$ différent des (x_i) ⁸. Alors,

$$q(x) = p_n(x) + [y_0, \dots, y_n, y_\phi] \prod_{0 \leq i < n} (x - x_i).$$

Via le résultat précédent, nous obtenons $q(x) = p_n(x) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$. Or $q(x_\phi) = f(x_\phi)$ pour

x_ϕ pris arbitrairement. Donc pour x dans $[a, b]$, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=0}^n (x - x_i)$

donc $\|f - p_n\|_\infty \leq \sup_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n)}|}{n!} \prod_{i=0}^n |x - x_i|$. □

Ainsi, selon la fonction étudiée et les points d'interpolation, la quantité à droite de l'inégalité du théorème précédent peut être **arbitrairement grande** ! L'objet de la prochaine section est de **minimiser** cette borne pour espérer une **parfaite approximation**.

8. Autrement la différence est nulle et nous concluons directement.

3.1.2 Abscisses de Tchebychev

Conséquemment, pour minimiser cette borne, nous pouvons influencer **uniquement** sur le choix des abscisses (puisque f est fixé car c'est notre objet d'étude). Ainsi, trouvons un **meilleur choix d'abscisses**.

Définition 16 (Polynômes de Tchebychev). *On appelle les polynômes de Tchebychev de première espèce ceux définis sur $[-1, 1]$ par : $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Entre autre, T_n est la somme des puissances devant $\cos(\theta)$ lorsque l'on développe $\cos(n\theta)$ ⁹.*

Définition 17 (Abscisses de Tchebychev). *On appelle **abscisses de Tchebychev** les racines de T_n . Ce sont celles telles que $n \arccos(x) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, cad. $\cos(\frac{\pi X}{2n})$ avec X impair. Or $\deg(T_n) = n$, donc le polynôme possède n racines : $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ et les racines sont simples puisque $k \neq k' \implies x_k \neq x_{k'}$.*

Remarque 18. *Le coefficient du monôme de plus haut degré de T_n est 2^{n-1} .*

Démonstration. En considérant la partie réelle de la formule de Moivre, on trouve que

$$\cos(n \arccos(x)) = \Re((\cos(\arccos(x)) + i \sin(\arccos(x)))^n) = \Re\left((y + i\sqrt{1-y^2})^n\right)$$

avec $y = \cos(\arccos(x))$ et en ayant utilisé le fait que $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$. Dès lors, utilisons la formule du binôme de Newton :

$$\Re\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^k \sqrt{1-y^2}^k y^{n-k}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} i^{2k} \sqrt{1-y^2}^{2k} y^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1-y^2)^k y^{n-2k}.$$

Ce qui nous intéresse c'est le coefficient devant le monôme de plus haut degré. Ainsi, $\forall k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \rrbracket, 2k + n - 2k = n$, nous remarquons donc que le coefficient dominant est

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \right) = \frac{(1+1)^n + (1-1)^n}{2} = 2^{n-1}.$$

□

À présent, montrons que cette famille de points caractérise (selon les contraintes du problème) le "plus petit supremum" pour un polynôme unitaire, polynôme dont le coefficient dominant est 1. Tout polynôme peut être normalisé donc sans pertes de généralités, nous avons le résultat suivant.

Théorème 19. *Soient Q un polynôme unitaire de degré $n+1$ et $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de points interpolés. $\forall x \in [a, b]$, si $\sup_{x \in [a, b]} \prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \sup_{x \in [a, b]} |Q(x)|$ alors les x_i sont les abscisses de Tchebychev.*

9. Exemple : $\cos(3\theta) = 4 \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta)$, donc $T_3(x) = 4x^3 - 3x$.

Démonstration. Nous travaillerons sur $[-1, 1]$, il suffit d'une transformation affine pour se ramener à $[a, b]$. On remarque que si les points interpolés sont les racines de T_{n+1} , alors :

$$\frac{T_{n+1}}{2^n} = \prod_{i=0}^n (x - x_i) \text{ donc, } \sup_{x \in [-1,1]} \prod_{i=0}^n |x - x_i| = \frac{1}{2^n} \sup_{x \in [-1,1]} |T_{n+1}| = \frac{1}{2^n}.$$

Maintenant choisissons une nouvelle famille de points, celle-ci permettra de déceler une propriété intéressante sur Q ! Soit $(y_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que $y_i = \cos(\frac{i\pi}{n+1})$ ¹⁰. Montrons, par l'absurde, que $\frac{1}{2^n} \leq$

$\sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)|$. Donc supposons que $\frac{1}{2^n} > \sup_{x \in [-1,1]} |Q(x)|$. On définit W pour tout y_i par :

$$W(y_i) := Q(y_i) - \frac{T_{n+1}(y_i)}{2} = Q(y_i) - \frac{(-1)^i}{2^n}.$$

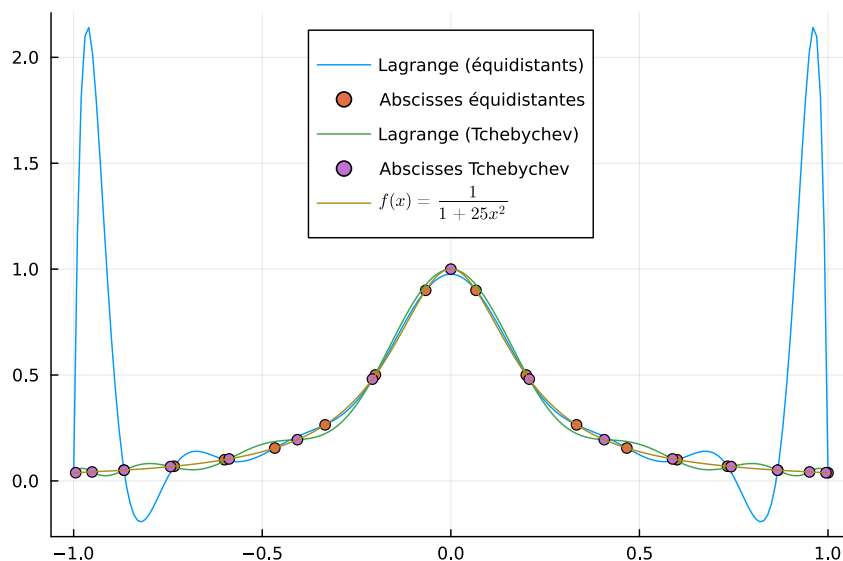
Si i pair alors $W < \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = 0$ et si i impair alors $W > -\frac{1}{2^n} - \frac{-1}{2^n} = 0$ car, par hypothèse, le sup de Q est majoré en valeur absolue par 2^{-n} (et *a fortiori* $-2^{-n} < Q < 2^{-n}$).

Donc W change $n+1$ fois de signe. Cependant, Q est un polynôme unitaire et $\frac{T_{n+1}}{2^n}$ aussi donc $\deg(W) = n$, donc $W = 0$. Ainsi $\sup_{x \in [-1,1]} |Q| = \sup_{x \in [-1,1]} \left| \frac{T_{n+1}}{2^n} \right| = \frac{1}{2^n}$, ce qui est absurde. Donc $\frac{1}{2^n} \leq$

$\sup_{x \in [-1,1]} |Q|$. Ainsi, $\sup_{x \in [-1,1]} \prod_{i=0}^n |x - x_i| \leq \sup_{x \in [-1,1]} |Q|$, avec $x_i = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ pour $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. \square

3.1.3 Résultat interpolation

On a vu que les abscisses de Tchebychev sont une famille de points permettant de diminuer **au mieux** la borne du théorème 15. Le graphique suivant permet d'illustrer le phénomène de Runge tout en montrant un moyen d'y palier.



10. A titre d'information, ces valeurs sont les extremas de T_n

Toutefois, rien ne nous garantit que cette famille de points est solution de tous nos maux ! En effet, dans la section suivante (3.3), des résultats que nous trouvons important montrerons les limites de cette approche.

3.2 Module de continuité

Un outil, en théorie de l'approximation, est le module de continuité. Ceci permet de quantifier la **régularité d'une fonction**, dans notre cas sa continuité uniforme.

Définition 20 (Module de continuité). *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors le module de continuité est*

$$w(t) = \sup\{|f(x) - f(y)|, |x - y| \leq t\}, \quad t \geq 0.$$

Un exemple avec une fonction régulière permet de mieux comprendre son utilité : **estimer**.

Remarque 21. *Soit f lipschitzienne d'ordre k , $\forall(x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$. Alors,*

$$w_f(t) \leq kt.$$

On remarque que ce nouvel outil est une "extension" de l'uniforme continuité. Ainsi sans surprise nous avons une intéressante propriété.

Proposition 22. *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} w(t) = 0$.*

Démonstration. En effet, nous sommes sur $[a, b]$, donc d'après le théorème de Heine, la fonction est uniformément continue ($\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall(x, y) \in [a, b]^2, |x - y| \leq \eta, |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$) On a donc :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, w(\eta) \leq \epsilon \text{ donc, } \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall h \leq \eta, w(h) \leq \epsilon$$

$$\text{Soit, } \lim_{t \rightarrow 0} w(t) = 0$$

□

Nous avons défini précédemment les polynômes de Bernstein. Regardons donc son module de continuité et mesurons ainsi sa "**vitesse**" de convergence.

Proposition 23. *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors $\|f - B_n\|_\infty \leq \frac{3}{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.*

On trouvera une preuve dans le (fantastique) polycopié suivant [Mag11]. On remarque qu'à l'aide de la proposition 22, nous avons de nouveau prouvé le **théorème de Weierstrass**.

3.3 Lebesgue

Soit l'opérateur d'interpolation $L_n : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ qui à f associe p_n . On définit sa norme, nommée **constante de Lebesgue** : $\Lambda_n = \sup_{x \in [a, b]} \sum_{i=0}^n |l_i(x)| = \sum_{i=0}^n \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Théorème 24. *Aux points de Tchebychev, $\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi} \ln(n)$.*

Démonstration. Une minoration, partielle, est présente dans le Demailly [Dem16]. Enfin, une esquisse complète se trouve dans [Tre13]. \square

Théorème 25. $\forall (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ et p_n interpolant ces points, $\exists f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ tel que $\|f - p_n\| \rightarrow +\infty$.

Démonstration. On remarque que $\Lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ donc elle n'est pas uniformément bornée. Donc d'après le théorème (qu'on admettra vrai) de Banach-Steinhaus [Gou09, p. 398] :

$$\exists f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|L_n(f)\| = \|p_n\|_\infty \rightarrow +\infty, \text{ donc } \|f - p_n\|_\infty \rightarrow +\infty.$$

\square

Ainsi, nous voyons bien les limites de **toutes** familles de points! Toutefois, les abscisses de Tchebychev présentent de nombreux avantages!

Théorème 26. $\forall f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$, soit $L_n(f)$ le polynôme interpolant les abscisses de Tchebychev, alors, $\|f - L_n(f)\|_\infty = 0$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ et p_n son meilleur polynôme approximateur de degré n . De plus, on a que $f - L_n(f) = f - p_n + p_n - L_n(f) = (f - p_n) - L_n(f - p_n)$. Donc $\|f - L_n(f)\|_\infty \leq \|f - p_n\|_\infty + \Lambda_n \|f - p_n\|_\infty$ ¹¹.

Sachant que p_n est le meilleur polynôme approximateur de f , nous avons donc d'après 3.2, que $\|f - p_n\|_\infty \leq \omega\left(\frac{b-a}{\sqrt{n}}\right) \rightarrow 0$. Enfin, d'après le théorème des accroissement finis

$$\exists c \in [a, b], \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ donc } |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|, M = \sup_{x \in [a, b]} f'(x).$$

Ainsi f est lipschitzienne d'ordre M . Par conséquent, d'après 21 et 24 :

$$\Lambda_n \|f - p_n\|_\infty \sim \frac{2}{\pi} \ln(n) \cdot M \frac{b-a}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

On en conclut que, d'après le théorème d'encadrement, $\|f - L_n(f)\|_\infty \rightarrow 0$. \square

11. De manière plus générale, $\forall f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}), \|f - L_n(f)\|_\infty \leq (1 + \Lambda_n) \|f - p_n\|_\infty$.

3.4 Unicité de la meilleure approximation

Les points de Tchebychev nous sont très utiles mais ils rencontrent tout de même des obstacles (théorème 25). Ainsi, l'objet de cette section sera donc de construire des points pour approximer toutes les fonctions continues. Nous avons déjà prouvé l'existence d'un meilleur polynôme approxi-mateur sur E (cf. partie 2.2). Dans la suite nous travaillerons sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Définition 27 (Fonction oscillante). *On dit qu'une fonction est **sautillante** sur n points appartenant à $[a, b]$ s'il existe n points, $x_0 < \dots < x_{n-1}$, tels que :*

$$f(x_i) = -f(x_{i+1}), \quad \forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket.$$

La fonction est dite **équioscillante** [eAM89, p. 26] si, de plus :

$$|f(x_i)| = \|f\|_\infty, \quad \forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

Théorème 28 (Unicité du meilleur polynôme approximateur). *Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $n+2$ points $x_0 < \dots < x_{n+1}$ alors il existe un unique polynôme p_n appartenant à P_n , l'ensemble des polynômes de degré au plus n , tel que $f - p_n$ équioscille sur les $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$. Ce polynôme vérifie :*

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |(f - p_n)(x_i)| < \max_{0 \leq i \leq n+1} |(f - q)(x_i)|, \quad \forall q \in P_n, \text{ avec } q \neq p_n.$$

Ce polynôme est le **meilleur polynôme approximateur** (au sens minimax ou au sens de la définition 8).

Démonstration. Soit $q \in P_n$, supposons que $f - p_n$ est sautillante sur les $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$. telle que

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |(f - q)(x_i)| \leq \max_{0 \leq i \leq n} |(f - p_n)(x_i)| \quad (13)$$

Soit x_i tel que $(f - p_n)(x_i) \geq 0$, sans perte de généralité.¹² Ainsi,

$$(q - p_n)(x_i) = (f - p_n)(x_i) - (f - q)(x_i) \geq 0, \quad \text{d'après (13).}$$

Or, $(p_n - q)(x_i) \leq 0$, donc $(f - p_n - f + q)(x_i) \geq 0$. On sait que pour les x_i , $f - p_n \geq f - q$. De plus $f - p_n$ sautillante et d'après 13, en particulier avec x_{i+1} , $(f - p_n)(x_{i+1}) \leq (f - q)(x_{i+1})$. Donc $(f - p_n - f + q)(x_{i+1}) = (q - p_n)(x_{i+1}) \leq 0$. Ainsi :

$$(q - p_n)(x_{i+1}) + (p_n - q)(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} q' - p_n' \leq 0. \quad (14)$$

En dérivant (14), on remarque qu'à l'aide d'une succession de TVI, $q' - p_n'$ possède au moins n racines, donc $q' - p_n' = 0 \implies q - p_n = \lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, sachant que $q - p_n$ alterne au moins $n+1$ fois de signe (une fois par x_i), on en déduit que $q - p_n = 0$. C'est-à-dire que p_n est unique et sautillante.

12. Dans le cas contraire, il suffit de multiplier par -1 , f, p_n et q !

Enfin, si $f - p_n$ est équiocillante, $\forall q \in P_n$ avec $q \neq p_n$,

$$\|f - p_n\|_\infty = \max_{0 \leq i \leq n+1} |(f - p_n)(x_i)| < \max_{0 \leq i \leq n+1} |(f - q)(x_i)| \leq \|f - q\|_\infty$$

□

Nous avons vu que le polynôme p est la meilleur approximation au sens de minimax et qu'il est unique. Toutefois quid de l'existence d'une telle équiocillation sur $n + 2$ points de $[a, b]$? Nous allons le construire à l'aide de l'algorithme de Remes!

3.5 Algorithme de Remes

À l'étape k , choisir $n + 2$ points (x_i^k) tel que $f - p_n^k$ soit sautillant pour $p_n^k \in P_n$. Ce polynôme existe bel et bien puisque d'après sa définition c'est un système à $n + 1$ équations et inconnues¹³, et le précédent théorème a montré son unicité.

Si $f - p_n^k$ équiocille, on arrête l'algorithme. Nous avons trouvé!

Sinon, $\exists y \in [a, b]$, $\|f - p_n\|_\infty = |(f - p_n)(y)| > |(f - p_n)(x_i^k)|$ (autrement, il équiocillerait). Ensuite, tout le principe de l'algorithme est qu'il échange un des $n+2$ points par y et en redéfinissant les autres, si besoin, en fonction de leurs voisins. Ces étapes sont faites dans le but de toujours avoir un polynôme qui oscille. Ainsi,

—

$$\text{Si } y \in [a, x_0^k[\text{ et } (f - p)(y) * (f - p)(x_0^k) \geq 0 \text{ alors } = \begin{cases} x_0^{k+1} = y \\ x_i^{k+1} = x_i^k \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \end{cases}$$

—

$$\text{Si } y \in [a, x_0^k[\text{ et } (f - p)(y) * (f - p)(x_0^k) < 0 \text{ alors } = \begin{cases} x_0^{k+1} = y \\ x_i^{k+1} = x_{i-1}^k \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \end{cases}$$

—

$$\text{Si } y \in]x_i^k, x_i^k[\text{ et } (f - p)(y) * (f - p)(x_0^k) \geq 0 \text{ alors } = \begin{cases} x_i^{k+1} = y \\ x_j^{k+1} = x_j^k \quad \forall j \neq i \end{cases}$$

—

$$\text{Si } y \in]x_i^k, x_i^k[\text{ et } (f - p)(y) * (f - p)(x_0^k) < 0 \text{ alors } = \begin{cases} x_{i+1}^{k+1} = y \\ x_j^{k+1} = x_j^k \quad \forall j \neq i+1 \end{cases}$$

—

$$\text{Si } y \in]x_{n+1}^k, b] \text{ et } (f - p)(y) * (f - p)(x_0^k) \geq 0 \text{ alors } = \begin{cases} x_{n+1}^{k+1} = y \\ x_j^{k+1} = x_j^k \quad \forall j \leq n \end{cases}$$

13. Dans les faits, nous avons $n + 2$ inconnues mais en en fixant une, nous en obtenons bien $n + 1$.

$$\text{Si } y \in]x_{n+1}^k, b] \text{ et } (f - p)(y) * (f - p)(x_0^k) < 0 \text{ alors } = \begin{cases} x_{n+1}^{k+1} = y \\ x_j^{k+1} = x_{j+1}^k \quad \forall j \leq n \end{cases}$$

On remarque donc qu'au fil des étapes, l'image de nos nouveaux points est égale à la valeur de la norme uniforme. Ainsi nous avons réussi à montrer l'existence et à caractériser l'unique meilleur polynôme approximateur. Ce qui achève notre objectif! Une dernière question se pose. Avec quels points initialiser notre algorithme? Nous devrions minimiser la borne supérieure du théorème 15. Ainsi un bon choix, selon le théorème 19, serait de choisir les racines de Tchebychev. ¹⁴

Enfin, pour notre plaisir, si nous sommes en présence d'un polynôme dont l'erreur oscille, nous pouvons estimer à quel point celui-ci est proche d'être le meilleur polynôme approximateur.

Théorème 29. (de La Vallée Poussin 🐼) Soient $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, p_n son meilleur polynôme approximateur de degré au plus n équi-oscillant aux $n + 2$ points $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$. Soit $q_n \in P_n$, si $f - q_n$ oscille, alors,

$$\min_{i \in [0, n+1]} |(f - q_n)(x_i)| \leq \|f - p_n\|_\infty.$$

Démonstration. ([Mag11, p. 31]) Supposons que $\min_{i \in [0, n+1]} |(f - q_n)(x_i)| > \|f - p_n\|_\infty$. Alors pour chaque x_i , $f - q_n$ est du même signe que $f - p_n$. Ainsi, le polynôme $p_n - q_n$ de degré au plus n alterne de signe $n + 2$ fois. C'est impossible! □

Remarque 30. On remarque donc une estimation de notre candidat :

$$\min_{i \in [0, n+1]} |(f - q_n)(x_i)| \leq \|f - p_n\|_\infty \leq \max_{x \in [a, b]} |(f - q_n)(x)|.$$

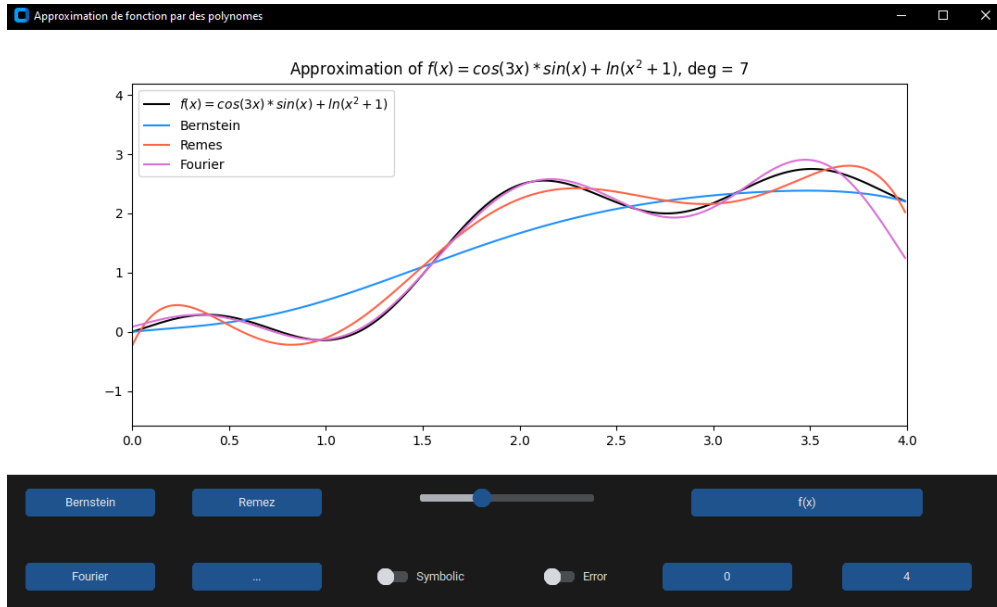
4 Approximation numérique

4.1 Programmes

4.1.1 Visualisations numériques

Un programme, de visualisation de courbes, interactif a été fait pour synthétiser / visualiser ce projet. On trouvera une présentation et les fichiers pour l'utiliser [ici](#).

14. Toutefois, un meilleur départ consisterait à prendre les extremas des polynômes de Tchebychev [eAM89, p. 30]!



4.1.2 Assistant de preuve – Lean

Lean est un langage de programmation relativement différent des classiques C, Fortran, Python... Son but est d'accompagner l'utilisateur dans la **vérification d'une preuve mathématique**. Grossièrement, la compilation du programme équivaut à la démonstration du résultat donné. Lean peut être relativement difficile à écrire, en revanche, il se lit très aisément (ou au moins plus aisément que **Coq**). Par exemple, pour définir qu'une fonction est continue en un point x_0 de \mathbb{R} :

```
def is_continuous_at (f : ℝ → ℝ) (x₀ : ℝ) :=
  ∀ x, ∀ ε > 0, ∃ η > 0, |x - x₀| ≤ η → |f x - f x₀| ≤ ε
```

On trouvera le code complet à l'adresse [suivante](#). Nous avons joué et tenté de démontrer divers résultats utiles à ce projet.

4.2 Améliorations

On présente deux améliorations nous ayant permis d'accélérer les calculs ou bien de les rendre plus exacts. La première est, "paradoxalement", purement mathématique et la seconde informatique.

4.2.1 Développement asymptotique

On se restreint à $I = [0, 1]$ (afin de simplifier la présentation des calculs). Sous certaines hypothèses, on va être en mesure de dire donner une estimation de la "taille" de l'**erreur d'approximation** (c'est-à-dire $|B_n(f) - f|$).

Proposition 31. *Soit f une fonction \mathcal{C}^2 sur I , alors :*

$$B_n(f)(x) - f(x) = O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (15)$$

Démonstration. La preuve est dans l'esprit du programme de L1 et nous fait utiliser divers résultats déjà démontrés. Remarquons tout d'abord que par Taylor-Young, nous avons que :

$$f(a) = f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - a) + f''(x_0) \frac{(x_0 - a)^2}{2} + o((x_0 - a)^2). \quad (16)$$

Posons $a = k/n$ et $x_0 = x$, alors $f(k/n) - f(x) = f'(x)(x - k/n) + f''(x)(x - k/n)^2/2 + o((x - k/n)^2)$. On multiplie chaque côté de l'égalité par $\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ et l'on somme pour chaque k entre 0 et n . On obtient alors :

$$\sum_{k=0}^n (f(k/n) - f(x)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^n f'(x)(x - k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \quad (17)$$

$$\sum_{k=0}^n f''(x)(x - k/n)^2/2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + o(\dots). \quad (18)$$

Ce qui est identique à : $B_n(f)(x) - f(x) = f'(x) \times$ une somme $+ f''(x) \times$ une autre somme $+ o(\dots)$.

En utilisant le lemme 2, on peut calculer toutes les sommes et l'on aboutit à (en passant à la limite) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(B_n(f)(x) - f(x)) = \frac{1}{2} x(1-x) f''(x). \quad (19)$$

Ce qui permet de conclure au résultat désiré. *Les plus curieux auront remarqué que l'on vient de donner une démonstration alternative du théorème 3 (pour les fonctions C^2 certes)!* \square

Plus généralement, on devrait avoir un résultat pour des dérivées d'ordre supérieur [eZG12, p. 2] (néanmoins, nous n'avons pas été en mesure de le prouver).

Proposition 32. *Si f admet une dérivée $2k$ -ième bornée sur l'intervalle $]0, 1[$, alors :*

$$B_n(f)(x) - f(x) = + \sum_{a=2}^{2k-1} \frac{f^{(a)}(x)}{a! n^a} T_{n,a}(x) + O\left(\frac{1}{n^k}\right), \quad (20)$$

$$\text{avec } T_{n,a}(x) = \sum_k (k - nx)^a \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}. \quad (21)$$

Raisonnement avec des fonctions de plus en plus régulières semble accroître la précision de leur estimation par les polynômes de Bernstein.

4.2.2 Calcul symbolique

L'une des différences fondamentales entre un calcul fait sur papier et un calcul exécuté (classiquement) sur un ordinateur réside dans la précision. Un humain réalise des calculs **exacts** là où un ordinateur les **approxime**. D'une telle approximation peuvent survenir divers problèmes (débordement de mémoire, virgule flottante malencontreuse, propagation d'erreur...). Une manière de résoudre ce problème (en acceptant de perdre considérablement en performance) est de faire **symboliquement** les calculs. L'ordinateur va alors procéder exactement comme le ferait un humain.

Références

- [Bur10] David Burguet. **Théorème de Stone-Weierstrass et Applications**, 2010.
- [Dem16] J.P. Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles - 4ème Ed.* GRENOBLE SCIENCES. EDP Sciences, 2016.
- [eAM89] M. Crouzeix et A.L. Mignot. *Analyse numérique des équations différentielles.* Collection mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1989.
- [eZG12] Jacek Cichoń et Zbigniew Gołębiewski. **On Bernoulli Sums and Bernstein Polynomials.** *DMTCS Proceedings vol. AQ, 23rd Intern. Meeting on Probabilistic, Combinatorial, and Asymptotic Methods for the Analysis of Algorithms (AofA'12)*, pages 179–190, 2012.
- [Gou09] X. Gourdon. *Analyse.* Ellipses, 2009.
- [Gri19] J. Grifone. *Algèbre Linéaire 6E Édition.* Cépaduès-Éditions, 2019.
- [Mag11] Alphonse Magnus. **Analyse numérique : approximation, interpolation, intégration**, 2011.
- [Mon23] P. Monnier. **Espaces vectoriels normés**, 2023.
- [Spe] David E Speyer. **Lagrange polynomials do not always converge. Why?**
- [Tre13] L.N. Trefethen. *Approximation Theory and Approximation Practice.* Other Titles in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.