# Apprendre en écrivant

Commencé le 9 mai 2022

Dernière compilation le 11 février 2023

Garnier M.

2022

Taux d'avancement **1ère étude** (Première/Terminale, introductions) : 13 %

Fini le : X août 2022

Taux d'avancement **2ème étude** (Première/Terminale, problèmes) : 3 %

Fini le : X août 2022

Taux d'avancement **3ème étude** (L1) : 0 %

Fini le : X août 2023

Taux d'avancement **4ème étude** (L2) : 0 %

Fini le : X août 2024

Taux d'avancement **5ème étude** (L3) : 0 %

Fini le : X août 2025

# Table des matières

## CHAPITRE 3



## CHAPITRE 4

## CHAPITRE 6

## Chapitre 7

## Chapitre 10

### Exotique – autres — Page 173

# Partie I

# Propos préliminaires

Tout récemment, le 8 avril 2022, on m'a proposé de faire un exposé. J'ai clairement fait n'importe quoi. Néanmoins, c'était de loin l'une de mes meilleures expériences : se retrouver seul entre un tableau à craie et un public. Je ne maîtrisais malheureusement pas grand chose mais je m'amusais (ça semble s'être ressenti). J'ai eu une sorte d'illumination en étant placé en contexte, au sein même de l'université de ma bonne petite ville.

Je me suis rendu compte que les choses pouvaient être sérieuses (être immergé m'a fait ouvrir les yeux) ! J'ai "toujours" eu tendance à essayer de foncer tête baissée n'importe où (chercher à comprendre des sujets me dépassant hautement par exemple). Ces derniers temps, j'ai réussi à commencer à inverser la tendance : je me concentre sur les fondamentaux et y trouve même un intérêt ! Je ne sais toujours pas où cela va exactement me mener mais je déborde d'énergie d'y foncer ! Pour autant, je ne crois pas avoir perdu ma curiosité (c'est la remarque que me faisait ma professeure de première qui avait bien vu que je partais de travers : se canaliser mais ne pas perdre les rares avantages de quelqu'un qui part dans tous les sens).

Comme beaucoup de personnes partant, explosant dans tous les sens, je ne finis que très peu (pour ne pas dire) aucun projet. J'ai réussi à en conclure certains tout de même ! (Dont un bon petit mémoire de cent vingt pages en littérature et histoire, un commentaire d'un article de Poincaré, un mini article de recherche sur les suites et les transformations de polygones réguliers, un document de note d'apprentissage... Mais rien de réellement fantasmant...)

Ce projet est différent : c'est celui de mes études, de mon "amour" pour les Mathématiques. Mais ce n'est pas simplement pour une question de différence de situation que la finalité risque d'être nécessairement... différente. Gné. J'ai revu à peu près tout (il me reste néanmoins certains petits agrégats du passé qui peuvent me faire défaut) : pragmatique, aller à l'essentiel et au plus simple dans un premier temps, poser des questions (en rendant ce projet plus ou moins "public") etc.

Dans ce projet, c'est vraiment "ma naissance" qui doit se faire. Pas une renaissance, non ; bien une naissance, je dois tout reprendre "de zéro" (dans la mesure du possible) pour explorer des champs entiers et tenter de les assimiler efficacement. Mais tout n'est évidemment pas une histoire d'efficacité, de résultat... Faisons le avec le cœur ! Prenons le temps de prendre le temps. Cela rend d'autant plus impossible ce projet mais, disons que, je préfère un projet impossible et personnel à une masse insignifiante à mes yeux (car gouvernée par la performance et le résultat) mais réalisée. J'ai envie de m'amuser.

Tiens, quand je dis que je pars vraiment dans tous les sens, c'est justement l'occasion de le démontrer. Même si je n'y comprends absolument rien, je réussis à m'émerveiller de simples caractères sur une livide page blanche. Je rêve de comprendre des choses comme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$. Sacrilège ! J'ai écrit cette beauté, mais qu'est-ce ?! À dans quelques années pour savoir !

Je suis conscient que j'ai beaucoup de défauts et qu'un nombre inconsidérable de choses peuvent m'empêcher d'atteindre mon but (en premier lieu : moi, bien évidemment). Il faut que je réussisse à me motiver, tenir sur la longueur, être constant, s'amuser au fil de l'eau, être rigoureux et découvrir plein de nouvelles choses !

Il n'y a aucune "réelle" ambition dans ce projet. Il est motivé par tout un faisceau d'objectifs, volontés, buts, directions en tout genre mais ne possède aucune prétention. (J'espère simplement ne pas faire trop de fautes.)

À vrai dire ce doit être la quatrième ou cinquième fois que je (re)commence un tel projet quand j'y pense. Et ce doit bien être la deuxième fois que je dis que les choses vont êtres différentes, que je pense que j'ai profondément changer. Il ne faut pas trop que je m'appesantisse sur un travail de fondations, de recherche bibliographique (dans l'idée de faire "comme les grands"), il faut que je vois des choses assez rapidement ou je risque de m'essouffler sans tarder. Néanmoins, il va falloir attendre encore un petit peu le temps que je finisse mes partiels (donc deux petites semaines, grossièrement ; ensuite, c'est champ libre et goal volant).

Déjà aujourd'hui, j'ai une petite idée de tout ce que je vais mettre dans les parties introductives et franchement ça me paraît faisable. Il y a du contenu (et même beaucoup) mais pas démesurément. À vrai dire, la "*Deuxième partie – Introduction*" va compiler l'ensemble des choses vues en Première et Terminale (avec option spécialité mathématiques tant qu'on y est) tout en tentant de "boucher les trous" et d'introduire de nouvelles choses. L'idée n'est pas vraiment d'utiliser des résultats mais plutôt de se construire un début de "base de donnée" utilisable à merci. Ensuite, la "*Troisième partie*" (dont je ne connais même pas encore le nom) commencera à utiliser tout le travail de définition et de compréhension de la partie deux pour s'intéresser spécifiquement à des problèmes et commencer à aller en profondeur en cherchant le cas particulier, le pourquoi du comment une telle chose est intéressante et de la "pure technique" (ou du moins ce dont je serai capable). Les parties suivantes n'ont pas encore été définies. Elles risquent très certainement de chacune représenter une année (Licence 1, Licence 2...). Ou alors, on découpera en deux comme pour la partie Première et Terminale avec une sorte de partie cours puis une partie "recherche" (mais cette idée ne me convient que moyennement... je préfère mixer les choses et aller directement aux choses ; la partie Première et Terminale est un peu à part dans la mesure où je vais avoir relativement peu de temps pour la faire et qu'il s'agit essentiellement de révisions et qu'elle n'aura pas été écrite au jour le jour de son apprentissage et de sa découverte).

Aller ! Tant que l'on y est, pour la beauté du geste (et ça va me permettre d'introduire une question un peu personnelle : qu'est-ce que j'aimerais faire plus tard), voyons un résultat balancé au lecteur dans *Théorème vivant* de Villani [Vil13], page 114 :

**Théorème 0.0.1** (Scheffer 1993, Shnirelman 1997)**.** Il existe une solution faible non nulle de l'équation d'Euler incompressible en dimension 2,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \nabla \cdot (v \otimes v) + \nabla p = f, \quad \nabla \cdot v = 0 \tag{1}$$

sans forçage ($f \equiv 0$), à support compact en espace-temps.

Pour le coup je n'y comprends vraiment rien mais ça fait partie de ces choses qui m'émerveillent (sacrilège !). Au lycée, en seconde, j'ai pu avoir ma période "passion Villani" et envie de découvrir le transport optimal et tout ce que faisait ce monsieur Villani (comme beaucoup de gens de ma génération je suppose, il a été étonnamment marquant ce monsieur).

Aujourd'hui, même si j'ai encore (et toujours) envie de toucher à tout, il semblerait que j'ai plus un penchant pour les choses algébriques (avec une fascination incontestable pour Jean-Pierre Serre ; fascination bien plus grande pour lui que pour Grothendieck par exemple). Néanmoins, il est bien trop tôt pour quoi que ce soit (si ça se trouve je vais finir physicien théoricien qui sait...).

C'est en partie un des buts de ce "travail" : apprendre en écrivant et en découvrant : ne rien se fermer. Dans le meilleur des mondes, plus tard, je toucherai à tout. En réalité, nous verrons bien éhéh.

Il y a deux années, ce qui m'a décidé à ne pas aller en Mathématiques n'était pas forcément très clair... Aujourd'hui, je donne des raisons (plus ou moins lacunaires) : un manque de confiance en soi ? l'impression de n'être capable (en puissance) de rien ? une déception personnelle ? une désillusion ? une couillonnerie éhontée ? Je ne sais pas vraiment. Peut-être que je ne me sentais tout simplement pas prêt, que je voulais découvrir des choses ailleurs, que j'étais trop impétueux pour me fixer de suite ? Simple à dire...

Aujourd'hui, j'ai toujours mon amour pour ce que je veux (et vais) faire. Il y a eu une petite période de flou, de trouble mais tout semble s'éclaircir et j'ai l'impression d'y avoir même un peu gagné : quelle personne mauvaise j'aurais pu faire en partant immédiatement en Mathématiques. Je crois que j'ai eu besoin d'une sorte de "zone tampon", histoire de prendre du recul et de me canaliser un tant soit peu. J'étais clairement à côté de la plaque et je ne m'en rendais compte que très grossièrement. (Aujourd'hui, je suis encore un peu à côté de la plaque, mais je commence à réussir à contrôler la mesure de l'éloignement.)

Je me rends compte que, dans un passé pas si lointain, le fait d'être parti dans tous les sens m'a permis d'acquérir un ensemble de repères (certes pas très solide mais au moins je peux avoir une certaine confiance, je suis assez peureux disons). Ça me motive à être motivé. Peut-être que j'ai simplement grandi. J'aimerais continué à grandir avec les Mathématiques. Mais je veux rester "moi-même" : certes, les Mathématiques risquent de prendre une place assez énorme dans ma vie mais je ne veux pas faire que ça (et devenir le cliché du matheux qui ne parle que de Mathématiques et qui a tout ses codes (aujourd'hui, *memes*, blagues...) ; c'est clairement cela que je serais devenu si j'étais parti directement en Mathématiques ; j'ai envie d'être "ouvert" sur d'autres choses : littérature, histoire, musique, cinématographie, droit (tant qu'à faire...), physique, sport... ; mais je ne renie / dénigre aucunement ce comportement (le cliché du matheux)). Je ne veux pas m'intéresser à plein de choses "à côté" pour ne pas être noyé dans les mathématiques, non aucunement ! Je crois que j'en ai juste besoin pour "être inspiré", avoir des idées (aussi maigres soient-elles, je prends)...

Oups, un peu de math est tombé de ma poche : $\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} f_{(i_1,\ldots,i_k)} (\mathrm{d}x_{i_1})_p \wedge \ldots \wedge (\mathrm{d}x_{i_k})_p$.

L'introduction aux formes différentielles provient d'un projet avec Pierre-Louis Frabel (2022). Il a clairement mieux compris que moi les choses mais c'était vraiment stimulant de plancher dessus une quasi nuit entière. On a rédigé un joli petit document qui reprenait essentiellement le cours que l'on avait suivi en donnant quelques exemples. J'ai vraiment senti à quel point il me manquait des bases. Faut combler cela !

À l'instant même, mon père vient de me ramener un livre : *La science et l'hypothèse* de Poincaré [Poi52] (offert par la librairie). Bah tant mieux ! Ne reste plus qu'à le lire.

À vrai dire je ne sais pas vraiment pourquoi je veux faire tout cela. Je ne sais pas pourquoi je semble si intéressé par les Mathématiques. Aucune idée... Depuis petit ? Mouais, et encore... (, j'ai mis longtemps à m'en rendre compte que j'aimais ça ! certes, j'avais des raisonnements et des manières de faire qui, avec le temps, se révèlent témoigner après coup d'un attrait mais sur le moment je n'avais aucune idée du pourquoi du comment j'agissais ainsi).

Je ne sais pas si j'ai ma place en Mathématiques (trop tôt pour le savoir et dans tous les cas impossible de savoir quoi que ce soit en pareille matière). J'ai l'impression que c'est compétitif, compliqué à l'extrême (et que plus on l'aime, plus on risque de se trouver mauvais). Je sais que je ne suis pas toujours une lumière (pour ne pas dire jamais). Je ne me sens pas de destin transcendant et révolutionnant les pans entiers de la recherche. Quand j'étais plus petit, disons que, je pouvais avoir la volonté de faire de "grandes choses". Aujourd'hui, je ne sais pas vraiment ce que je voudrai faire. Je crois avec une tendance à vouloir écrire une bonne grosse *summa* et essayer d'écrire des documents de "référence" sur un sujet. Ici, aucune prétention tel. C'est un peu mon jardin secret où je m'essaie d'y faire pousser quelque chose. Quoi ? Bohhh, on verra bien !

**Conjecture 0.0.2** (Hecke 1920 ([Col11], page 536))**.** Si $\chi$ est un caractère de Hecke primitif, alors $\mathrm{L}(\chi, s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$ si $\chi$ est le caractère trivial.

Encore une chose à laquelle je ne pige rien mais qu'est-ce que j'ai envie de lire le bouquin de Colmez [Col11]. Ce sera un des gros buts de la 3ème et 4ème étude *a priori* (donc Licence 1 et Licence 2) et même bien après je suppose. Dans la mesure du possible, en prenant un sujet d'étude, ça me semblerait pas mal de plancher sérieusement dessus. Et puis, il semblerait que sa première partie (son Vocabulaire) sera une des fondations de ma culture mathématique (que je pense augmenter de quelques commentaires de toutes façons, mais l'essentiel du contenu sera repris dans une étude (dans de très longs mois, voire (plus réalistement) année)).

En soi, quand j'écrirai, l'idée sera de dérouler le plus "naturellement" les choses, comme elles viennent. Enfin, comme je supposerai qu'elles sont censées venir... Je n'ai pas envie de me casser la tête à me demander si si ou si cela ! Si je veux en parler, j'en parle. Ce sera ma dictature des mots. Il n'y a que sur le plan et le déroulé (très général) des idées que je vais être tatillon et peut-être même un peu pointilleux : ce devra être suffisamment bien fait pour ne pas avoir à s'en soucier une fois que l'on écrit. Toutes les questions de déroulé, de gradation de la progressivité et de la difficulté n'auront (théoriquement) pas lieu d'être ! Pour la simple et bonne raison que j'apprends. (Ce sera donc adapté à ma manière de faire, j'avancerai donc logiquement selon mes ressentis. C'est avant tout pour moi que j'écris, je crois. Mais si des gens le lisent, j'en serais bien heureux. Bienvenue !)

# Partie II

# Introduction

*L'homme est l'être qui cherche la Vérité, l'homme est aussi un être de foi. En fait, il est toujours en train de croire en quelque chose, même s'il ne se rend pas compte, et surtout s'il ne s'en rend pas compte.* [Laf19]

Lafforgue (Laurent) semble avoir avec ce côté un peu "philosophique" (je me rappelle qu'en lisant certaines de ses interviews, j'ai été relativement surpris et étonné par sa culture littéraire et sa formation aux lettres anciennes plus précisément (je crois)). Je ne pense pas que tout raisonnement mathématique dusse être (expressément et explicitement) accompagné d'une pensée philosophique (il existe une matière spécialement dédié à cela). Néanmoins, se posait la question de **"la philosophie" de l'objet** semble être nécessaire. À des niveaux relativement rudimentaires (le mien), cela ne se perçoit que (trop) peu je pense. On utilise un objet car c'est dans la logique (et non la philosophie) du problème. Mais, penser "simplement" à la philosophie de l'objet et de ce qui l'environne est par nature limitant (on ne va pas pouvoir introduire des choses qui semblent sortir de nulle part et développer de nouvelles philosophies).

Que pourrait-on ajouter à la philosophie de l'objet (ainsi qu'à sa logique) pour bien comprendre, attaquer... les choses ? **L'environnement** ? Ça paraît tentant et facile ?! Mais pour la même raison que précédemment, c'est limitant : si on conçoit de manière trop restreinte l'environnement, on semble condamner toute souplesse permettant de faire de nouvelles brèches dans la matière même des Mathématiques.

Et si l'on regardait rétrospectivement ce qui décrit l'environnement lui même, ce qui encode l'objet, ce qui lui donne un support, une base "utilisable" ? Et si **le langage** était une clef? *La clef d'un songe*[1], celui d'une exploration au-delà de la substance, des apparences[2] même des choses. Est-ce vraiment si prolifique et fécond ? J'espère que l'on réussira à se poser des questionnements intéressants que j'ai pour l'instant du mal à identifier[3].

Plantons un peu le décor. Que va-ton faire dans cette introduction ? Le but est de refaire tout le programme de Première et de Terminale de manière un peu détournée tout en se permettant quelques égarements et folies. On décompose simplement en quatre temps l'*apprentissage*[4] :

1. Il s'agirait de lire un jour ce faux opuscule [Gro86]. Au hasard, j'y ai trouvé cette citation en lien avec le langage. Comment comprendre (si elle est compréhensible) cette pensée ?

> Ce sont aussi les rêves au langage transparent, sans "code" secret ni jeux de mots d'aucune sorte, sans rien qui cache ou qui voile. Le message y apparaît avec une clarté fulgurante, indélébile, tracé dans la chair même de ton âme par une Main invisible et puissante, toi-même Lettre vivante et vibrant acteur de la Parole à toi adressée. Et chaque mot porte, qui s'accomplit en toi pour exprimer par les mouvements de ton âme un sens qui te concerne, toi et nul autre, et le pose dans ta main afin que tu t'en saisisses. Celui qui parle en ton cœur comme personne au monde ne pourrait te parler, Il te connaît infiniment mieux et plus intimement que tu ne te connais toi-même. Quand le temps est venu, mieux que personne, il sait quels sont les mots vivants qui trouveront en toi résonances profondes, et quelles sont les cordes secrètes qu'elles feront vibrer.

Il y a un air de cabale. Je ressens la même chose que lorsque j'ai lu la Bible. Mais, faisons des Mathématiques !!

2. Aller au-delà des apparences m'a été appris par un chargé de travaux dirigé de droit des sociétés (Eddy Accarion). Merci. Mais là, ce n'est pas exactement le sujet.

3. La lecture de [Poi52] va m'inspirer je sens. (Et qu'est-ce qu'il écrit bien Poincaré... ici je fais bien pâle figure (il va falloir que je me reprenne mais d'un autre côté j'ai vraiment envie d'écrire "à l'envie", sur le tas, au fil de l'eau...).

4. Je ne sais pas s'il peut être bon pour quelqu'un de suivre de ce que je vais faire. D'accord, je l'écris pour moi. Mais, si quelqu'un lit ? Que faire ? Certes, on ne peut pas le contraindre à ne pas lire, on peut peut-être l'en dissuader

— une introduction motivée : on ne va pas aller très loin et la première partie ne sera pas réellement formelle... On va surtout chercher à se poser des questions et commencer à construire un cadre théorique (philosophique, historique, propédeutique (?)). Ensuite, on va commencer à mettre les mains dans le cambouis et se taper "toutes les fondations". Oui et non en fait... faut pas déconner non plus, on va effleurer la chose et juste chercher à développer un langage.

— le langage mathématique : ce sera l'occasion de s'amuser encore un peu! Dans la première partie, on va rester très "formels" (présentation, évolutions et les grands objets du langage mathématique). C'est dans la seconde partie que l'on va voir concrètement comment "se font" les choses en questionnant des choses entendues à tour de bras : rigueur (qu'est-ce?), rédaction, notion de méthode, le raisonnement et les raisonnements utiles en Mathématiques.

— la notion d'espace : historiquement, la géométrie est le cadre idéal pour concevoir la notion d'espace mais ça va quand même "un peu" plus loin aujourd'hui. Malheureusement, on aura pas encore les outils pour aller très loin... on va néanmoins se permettre quelques petites "folies" (introduire (par exemple) les groupes, mais sans toute la théorie qui sera traiter dans quelques longs mois). Et enfin, on s'intéressera à des caractéristiques d'espaces (notion de longueur, orthogonalité...).

— des actions sur l'espace : franchement rien de fantastique, on va juste étudier des objets géométriques et "algébriques", analytiques, probabilistes, un peu arithmétiques (ainsi qu'une petite introduction au calcul matriciel, sans algèbre linéaire dans l'idée de ce que l'on a fait en Terminale). On ne fait pas franchement plus que le programme de Terminale (un peu renforcé).

Dans cette introduction, on se permettra néanmoins (comme dit plus tôt) quelques folies. Précisément? Aucune idée de quoi (pour l'instant, on verra à l'instinct). Plus les bases seront profondes et fondées, plus je risque de partir dans tous les sens ensuite et de m'amuser Mais comme il m'a été rappelé[5], il faut être pragmatique, aller à l'essentiel, être efficace et (au moins dans un premier temps) faire les choses simplement. Là, quand j'y pense, j'aimerais bien démontrer des bons petits résultats ou être capable de calculer des choses bien techniques. Par exemple, l'intégrale ci-dessous, ne le paraît pas comme ça, mais elle est méchante!

$$\int \frac{x^{p-1}}{x^n + a^n} \mathrm{d}x$$

J'avais eu l'occasion de travailler un peu dessus et (sans doute du à mon faible niveau), je séchais comme pas possible. C'est dans un vieux livre des années 20 que j'ai trouvé la réponse (une vraie mine d'or) [Edw20]. Ouais, le calcul intégral est vraiment un sacré objectif (typiquement, dans la partie "primitives et intégrations", le but sera d'aller bien au-delà du niveau Terminale...).

(ce type de réflexions typiquement...). Est-ce là réellement une bonne idée de suivre ce que je fais? Je vais juste m'amuser en essayant de ne pas dire de bêtise. Si cela suffit, tant mieux. C'est ma "première fois".

5. Je vais essayer de tenir à jour de l'avancement sur le forum les-mathematiques.net, et je vous remercie sincérement pour votre aide.

Sans avoir la prétention de pouvoir faire quelque chose comme Arnold (Vladimir) [Ale04], son cours donné en 1963 – 1964 à des lycéens consistant à donner une preuve topologique du théorème d'Abel me sidère. Essayer de grappiller deux ou trois choses serait vraiment une réussite ! Surtout que, putain, il y a des appendices... Pouvoir démontrer l'un des théorèmes de Liouville serait merveilleux :

**Théorème 0.0.3.** The indefinite integral $y(x)$ of the algebraic function $A(x)$ of one complex variable is representable by generalized elementary functions if and only if it is representable in the form

$$y(x) = \int^x A(t)\mathrm{d}t = A_0(x) + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \ln(A_i(x)) \tag{2}$$

where the $A_i(x)$, for $i = 0, 1, \ldots, k$, are algebraic functions.

Il se permet même d'aller démontrer des choses sur SL$(2, \mathbb{Z})$, de parler de germes, d'obstruction topologique... Ça me dépasse grandement et il ne sera aucunement question de telles choses ici (pour l'instant...).

Non quand je dis que je vais me permettre deux trois petites folies, ce sera bien plus "raisonnable" (il y a pas mal de résultats sur les groupes [6] qui ont l'air intéressant dans le livre du cours retranscrit de Arnold [Ale04]). Pourquoi pas aller piocher dans le document de préparation et transition entre la terminale et les CPGE scientifiques [LLG21] ?

Va falloir aller bouffer des inégalités en tout genre, pourquoi pas taper du côté des équations fonctionnelles histoire de s'ouvrir un peu le champ des possibles. Et en arithmétique ! Bon dieu, il va y avoir plein de choses à faire (théorème des quatre, trois et deux carrés ; trucs sur l'indicatrice d'Euler, sur des fonctions de compte...). Ce sera également l'occasion de s'intéresser et pourquoi pas tenter de résoudre un problème posé à Flavie (en Licence 1, Parcours Spécial) :

**Exercice** (Stepan Orevkov)**.** Le théorème des deux carrés de Fermat dit qu'un entier supérieur ou égal à $1$ est somme de deux carrés si et seulement si chacun de ses facteurs premiers de la forme $4k+3$ intervient à une puissance paire.

L'objectif est de comprendre la preuve de ce résultat et de démontrer par analogie un critère similaire pour la représentabilité des nombres réels sous la forme $z\overline{z}$ avec $z = a + b\zeta + c\zeta^2 + d\zeta^3$, avec $a, b, c, d$ des nombres entiers et $\zeta = \exp(2\pi i/5)$ la racine primitive de l'unité de degré $5$. (Puis généraliser).

Je crois qu'à la fin d'un exposé de la S.M.F. [BF06], il y a une quasi réponse à cela (ou du moins un bon cadre pour traiter "aisément" la question ; mais ça demande d'introduire pas mal d'objets).

Bon, commençons cette introduction !

6. D'accord, les groupes ne sont pas vues au lycée, mais sans le savoir on en bouffe. Puis, dans certain sujets du concours général, certaines questions reviennent grossièrement à démontrer que l'on a une certaine structure algébrique (par exemple un groupe). L'idée ne sera donc pas de développer les "bons" résultats de la théorie des groupes mais juste introduire la chose et voir en quoi cela peut s'avérer d'intérêt.

# Chapitre 1

# Introduction motivée

> *Il y a quelques années, mon ami R. Bott et moi-même allions recevoir un prix israélien (le prix Wolf) remis dans la Knesset, à Jérusalem. Bott devait dire quelques mots sur les mathématiques. Il m'a demandé : que dire ? Je lui ai dit "C'est bien simple ; tu n'as qu'à expliquer ceci : les autres sciences cherchent à trouver les lois que Dieu a choisies ; les mathématiques cherchent à trouver les lois auxquelles Dieu a dû obéir." C'est ce qu'il a dit. La Knesset a apprécié.* [SK06]

## 1.1 Entrées en la matière

Pour l'instant, rien de très formel. On va juste faire le point et voir alentours. On va tenter de rentrer dans la matière en regardant comment elle est faite et a été faite plutôt qu'en essayant de la faire de suite.

Bien évidemment, ce qui sera dit doit être (quasiment) pris à la légère (aucune vocation à la complétude, à la vérité absolue...).

Je n'ai pas encore eu réellement la possibilité de lire de "vrais ouvrages" d'histoire des sciences, d'un sujet spécifique ou d'une matière en général. Ma connaissance est limité à une agglutination, à une agrégation de plein de petites histoires éparses à droites à gauches. Ici, je vais tenter de recoller un petit peu les morceaux (mais sans réelle prétention). J'ai bien lu quelques livres [Leh17], [AV18] et les livres de la collection *Génies des mathématiques* (traduit de l'espagnol) par exemple, mais rien de Weil, Dieudonné, Milne...

Bien gré mal gré, l'ensemble de mes lectures m'a fait avoir quelques cultes (que je cherche à déconstruire et comprendre aujourd'hui). Par exemple, le mythe de l'École Normale Supérieure (père normalien, une grand mère y étant également passé (de ce que j'ai cru comprendre)) s'est ancré en moi. La fameuse "fraternité normalienne". Cela me sidère presque de voir à quel point "dès que" je vois un C.V. je m'aperçois que la personne est passé par l'école normale. Enfin... c'est sans doute un peu biaisé vu que je ne tombe quasiment "que" sur des gens considérés comme des références, donc bon. (Et puis ce n'est pas toujours le cas, il existe aussi des gens n'ayant pas fait l'ÉNS mais étant des pointures ou un minimum "connus" ; généralement, les personnes ayant suivis un enseignement universitaire "classique" ne précisent pas vraiment où ils ont fait leur Licence et Master. Je ne sais pas si le peu que j'ai vu est révélateur ou pas.) Ai-je vraiment envie d'aller dans une telle école ? Pour ma famille, ça semble aller de soi. Pour moi, pas du tout. (Le simple fait de travailler dans le public plus tard me dérange. Je n'ai aucune considération pour mon pays. Je ne vois pas ce qu'il représente et ce qu'incarne un français. Ça ne m'intéresse pas. Certes, en étant chercheur, on n'est (théoriquement) pas astreint à une logique d'État, mais c'est quand même le Président de la République qui signe le décret de nomination (c'est du moins le cas en droit, ça doit être identique en Mathématiques (*a minima*, la liste des candidats retenus à l'École Normale Supérieure est publiée sur *légifrance* donc bon), on est payé en tant que fonctionnaire etc.)

Je suis pleinement conscient que je ne peux faire parfaitement les choses (en particulier concernant *Apprendre en écrivant*). Trop souvent des projets ne sont jamais nés simplement car je voulais être trop préparé. Là, je me lance à cœur et corps perdu dans la bataille et on verra bien ce que cela donnera au fur et à mesure (et surtout à la fin!!!).

J'ai et j'aurai toujours peur que la somme de tout ce que j'ai emmagasiné ne soit pas le produit de ce dont je suis capable. Mais il va falloir inlassablement avancer (et ne pas oublier que l'on ne travaille que sur des représentations d'abstractions) !

### 1.1.1 Qu'est-ce que quoi ? !

#### 1.1.1.1 Une *merveille* pour les enfants

### 1.1.2 Motivations historiques et philosophiques

### 1.1.3 La place de l'apprentissage

En lisant un nième post sur les-mathématiques.net, une question paraissant anodine a retenue mon attention : quelle est la différence entre un **étudiant** et un **élève** ? Ça paraît être une pure distinction de style, simplement liée à la différence d'environnement dans lequel vivent ces deux notions. Toutefois, il y a sans doute une question plus générale liée à la place de l'apprentissage, à la place de l'étudiant, à celle de l'élève, au rapport au travail, à la conceptualisation personnelle que l'on peut tirer et se faire de tel ou tel objet...

J'ai lu je ne sais combien de discussion sur des personnes racontant leur parcours ou celui de *grands pontes* (à force, il n'y pas bien difficile de connaître la vie mathématiques de Grothendieck sans avoir (malheureusement) jamais lu la moindre de ses lignes). J'ai eu autour de moi quelques personnes qui ont bien fini ou qui vont bien finir (polytechniciens, normaliens, licenciés es Maths...). Néanmoins, dans mon entourage personnel, je n'ai jamais été "impressionné" par qui que ce soit. Je n'ai jamais senti que telle ou telle personne avait vraiment un point de vue, une manière d'approcher un problème, d'exprimer ses idées...

bien à lui, authentique, riche, dynamique (et qui me plaisait). Je n'ai jamais ressenti ce que nous vendent les mythes des *grands pontes*. On nous trace leur vie à coup d'anecdotes fantastiques et impressionnantes ! Néanmoins, la réalité a dû être plus crue. On ne nous raconte (quasiment) jamais les milliers d'heures de labeur, seul, à buter. Quand on écoute des gens, on est face à un produit (relativement) fini. De mon côté, au-delà de divers syndromes de l'imposteur, je n'ai jamais eu l'impression d'avoir été la moindre fois dans la phase "produit fini". (Et ça, c'est sans parler de ce nombre incalculable de fois où je suis retombé sur un vieux bout de papier griffonné ou écrit il y a deux semaines ou plusieurs années et que je me suis dit : *putain c'est troué ! ça c'est faux ! ça aussi !! eh bah tiens, ça ne tient pas tout ça... !*)

J'ai l'impression que je n'avancerai vraiment jamais. J'ai l'impression qu'il y aura toujours des zones d'ombre. J'ai l'impression d'être un fainéant. J'ai l'impression de ne pas en faire assez (pour ne pas dire que j'ai l'impression de ne rien faire du tout). J'ai l'impression d'être à côté de la plaque. J'ai peur de ne pas réussir à entrer dans *ce* monde.

Je ne me sens pas et je me sais relativement fébrile, pas franchement fantastique et étonnant. Mis à part le *forcing* et l'abnégation, je ne sais pas vraiment ce que j'ai pour moi. Pas franchement bon en calcul, loin d'être remarquable pour avoir des idées brillantes (ou rien que pas trop mauvaise). Bref, où aller ? Et pourquoi vouloir y aller ? Est-ce là sans doute une question récurrente chez un *étudiant*. C'est tout de même étonnant : étudier une chose "n'existant matériellement pas", sans application (par définition : ce sont vers les mathématiques pures que je souhaite aller, apparemment). Ça paraît trop beau pour être vrai.

Faire des choses pour un intérêt nous dépassant. Je crois que, même si on ne m'a pas vraiment inculqué de telles valeurs (ou bien si à chaque fois que l'on a essayé, l'idée a rebondi contre mon crane), c'est ce que je veux. Mais je ne sais même pas ce que pourrait être cet intérêt. Et je ne souhaite pas l'attendre. Est-ce là sans doute le sacrifice de l'étudiant dévoué : faire don de son temps, de son énergie et de sa volonté pour simplement rien, pour ***l'honneur***[1] ***de l'esprit humain***[2].

C'est un combat que j'ai envie de mener : l'Algèbre, mon grand combat [Ber18] ; l'Analyse, ma bataille ; les Probabilités, ma croisade ; la Géométrie, un sacerdoce faisant remonter aux sources des grands écrits... Ce sera une longue expédition, très bien résumée dans [Bou97] :

> *Pour ce qui est des jeunes, il faut qu'ils prennent conscience qu'arriver jusqu'à la recherche exige non seulement de plus en plus de connaissances mais de plus en plus de culture. Une recherche réalisée rapidement sur un sujet très pointu n'est pas une formation suffisante. La culture est la condition pour contourner les obstacles varier les stratégies et savoir à qui s'adresser en cas de blocage. Bien sûr publier est un encouragement, Choquet considère qu'il est bon que les jeunes se fassent les dents très tôt à partir de travaux récents.*

Oui, la recherche semble être mon objectif. Au temps de nous dire si elle sera professionnelle ou dilettante. http ://www.msa.bginette.com/MSA/TS-00-Intro.pdf file :///C :/Users/Yapix/Downloads/m

1. Oui, l'honneur n'est rien, fondamentalement.
2. J'ai vraiment envie de lire le bouquin de Jean Dieudonné [Die87].

apprentissage pas uniforme en France : certaines classes favorisées (LLG...), le HP...

### 1.1.4 La place de l'enseignement

### 1.1.5 La place de la recherche

Si l'on conçoit la recherche par rapport aux deux sections précédentes (apprentissage et enseignement), dans une certaine mesure, il semble être possible de pouvoir voir un fossé criant se dessiner. Ce que l'on développe est à mille lieux de ce que l'on apprend (bien évidemment au lycée [3], mais même en Licence [4], voire Master [5] dans une certaine mesure).

La recherche peut constituer une désillusion plus ou moins grande. Par exemple, Hormière écrivit [Hor20] :

> *On trouvera dans Douady (p. 31) un foncteur pleinement fidèle et essentiellement surjectif de la catégorie des revêtements dans celle des G-ensembles.* ***C'est l'un des grands regrets de ma vie de n'avoir jamais pu comprendre ce livre, snif!, mais la vie en décida autrement...***

Peut-être qu'il faut faire une forme de **don** à la Science (de manière idéale et idéelle), [Bou97] :

> *Il faut accepter cette générosité pour que la recherche soit féconde. S'il n'y a pas cette générosité, il n'y a pas mobilisation de l'énergie humaine pour arriver au résultat. Et cette philosophie vaut aussi pour les étudiants qui se lancent dans la recherche.*

C'est un monde cruel (au-delà du "juste" de l'humain)... il me semble d'ailleurs qu'un des grands pontes (Atiyah ?) expliquait que Serre lui avait raconté qu'au sortir de sa thèse il se demandait s'il était vraiment capable de continuer. Faut pas chercher de logique "humaine" dans le pourquoi ça marche ou pas, doit y avoir quelque chose surplombant (de pur). Mais bon, d'un autre côté, on trouvera toujours des gens pour dire "*fais et vois; te pose pas ce genre de questions, agis juste et tu t'en fous d'une forme de dévotion*". (Sans entrer dans des débats anthropologiques, les métiers qu'engendre la recherche semblent à mille lieux de l'agrégat des autres professions en ce qu'ils se détachent d'une finalité humaine et proprement matérielle (même si ça peut être vu comme un calcul, un pari sur l'avenir afin d'être mieux établi et dit "*plus développé*"...).)

---

3. Ça paraît con mais on m'a sérieusement demandé si quand on faisait des études de mathématiques, "*on cherchait (encore) sur les tables de multiplication ?*". En un sens, c'est vrai (algorithmes de factorisation, multiplication rapide...) mais je me doute que ce genre de choses n'était aucunement présente dans l'esprit de mon interlocutrice.

4. Je ne sais plus qui faisait cette remarque mais elle semble très pertinente : en Licence, on nous demande un certain côté "généraliste" : *faut être capable de se débrouiller en analyse, algèbre, arithmétique, (un peu en) géométrie, probabilités...* C'est sans doute une marque très révélatrice du fossé entre recherche et apprentissage : il est inconcevable de demander ça à un chercheur : être spécialisé dans un domaine paraît déjà être une tâche monstre...

5. Dans [Col11], son Appendice G – *Introduction au programme de Langlands* commence ainsi :

> Un titre plus honnête pour ce chapitre, qui contient beaucoup d'énoncés magnifiques mais peu de démonstrations, serait *Introduction à l'**existence** du programme de Langlands*, une vraie introduction au programme de Langlands pouvant difficilement se faire avant le M2.

Je me souviens aussi d'un moment où, dans une conférence (pas "grand public") on demande à Serre ce qu'est le programme de Langlands et s'il pouvait en dire quelques mots; réponse : "Ah non!" D'un côté c'est frustrant d'avoir une telle réponse mais de l'autre c'est très beau de sectionner la discussion immédiatement pour ne pas dénaturer un sujet et en parler à la volée alors que de *vraies choses se passent* (même si je ne sais si ça cache des choses ou pas).

C'est rare de voir la recherche "se faire" (ou du moins se raconter; au-delà d'une vulgarisation qui reste plus ou moins "*vulgaire*") [6]

#### 1.1.5.1 La recherche s'organise à Toulouse !

Le gros du gros à Toulouse semble se situer à l'IMT : l'Institut Mathématiques de Toulouse (unité mixte de recherche du CNRS UMR 5219). On va évidemment trouver des Mathématiques sur le campus de l'UT3, mais aussi à l'UT2 (Mathématiques mais et Informatique appliquées aux Sciences Humaines et Sociales) et de manière plus étonnante à l'UT1 (au CEREMATH, à côté de la bibliothèque de la Manufacture des tabacs je crois; mais c'est un peu mort comme endroit (?)) voire peut-être même à TSE (mais, comme son nom l'indique, ce doit être démesurément orienté vers l'économie).

On ajoute ensuite tout le complexe de "grandes écoles" : INSA, SUPAERO... (et prochainement l'École Centrale de Toulouse). Et peut-être dans une "moindre mesure" (au moins concernant la recherche), la production de certains professeurs dans le secondaire / de professeurs de CPGE.

Et puis même, de manière plus "superficielle", Toulouse délivre des prix qui sont quand même assez reconnus (le prix Fermat) et à même des choses intéressantes (le prix Fermat junior par exemple). Ils capitalisent sur l'histoire [7]. Toujours dans la veine historique, il y a les *Annales de la Faculté des sciences de Toulouse* qui sont plutôt reconnues et bien connues ! (À noter que, sans réelle surprise, les publications sont plutôt faites en anglais.)

Toulouse est attractif mais je ne sais pas s'il l'est tant que ça. Certes il y a de très bons mathématiciens à Toulouse mais ça ne semble pas tant attirer (et puis Toulouse ne semble pas avoir l'histoire de Nancy par exemple, par exemple : de Poincaré à l'après-guerre avec quelques membres de Bourbaki).

Du peu que je connaisse, il y a tout de même des sortes de pôles de recherche autour d'un sujet bien précis à Toulouse : par exemple sur le groupe de Crémona autour de Stéphane Lamy et ses élèves (e.g. Anne Lonjou, Julia Schneider) avec des relations ici et là (Rennes avec Serge Cantat par exemple).

Sur un tout autre sujet, doit bien y avoir des gens autour de Bertrand Toën, je pense.

---

6. En France, on peut citer deux exemples qui présentent plus ou moins une recherche qui s'est faite : le livre de Villani [Vil13] et un article de P. Colmez sur *la courbe de Fargues et Fontaine*, avec des discussions mail etc... (je crois même qu'il existe une discussion sur mathoverflow qui présente deux ou trois projets pareils).

7. À ce sujet, il y a bien eu un *Séminaire d'histoire des Mathématiques de Toulouse* mais je n'ai pas l'impression de trouver un bon gros article sur l'histoire des Mathématiques **à** Toulouse !

#### 1.1.5.2 La recherche en France

#### 1.1.5.3 La recherche dans le monde

#### 1.1.5.4 Une recherche étudiante ?

## 1.2 Débuts de fondations

### 1.2.1 Structures et fondations

### 1.2.2 Logiques mathématiques et axiomatiques

### 1.2.3 Introduction à la théorie des ensembles

Sans entrer dans les débats d'experts, on peut sans doute voir naïvement la théorie des ensembles comme une base naturelle à "toute" approche des Mathématiques. Sans entrer dans les multiples querelles, ce n'est sans doute pas anodin si le premier des *Éléments de mathématique* de Bourbaki est l'ouvrage sur la théorie des ensembles de 1939 [Bou07f] [8].

Très honnêtement, je n'ai aucune envie de tout reconstruire formellement (qu'est-ce que ça me saoule), c'est très bien fait ailleurs (par exemple, de manière guidée chez Tao [Tao20]). Quoique, en vrai, ça ne me ferait pas de mal. Pesons simplement le pour et le contre. D'un côté, c'est super chiant. De l'autre, c'est super chiant mais ça pourrait m'obliger à aller voir en profondeur des trucs à première vue super chiants (auxquels je n'accroche pas du tout) mais qui pourraient se révéler intéressants ?! Eh merde. Essayons de bien faire les choses. On va évidemment, pour toute la suite de la partie, se référer au bouquin de Tao [Tao20], pourquoi pas celui de Godement [God69], aller piocher dans les cours d'introduction du supérieur d'Alain Troesch (?), surtout pas Wikipédia (je m'en méfie de plus ou en plus pour les Mathématiques), zieuter chez Bourbaki [Bou07f], la *Stanford Encyclopedia of Philosophy* [Bag21] (??), pourquoi pas le "petit" livre de Halmos [Hal98] ? Et puis après, regarder vite fait à droite à gauche ? (Le livre de Patrick Dehornoy [Deh17] chez Calvage & Mounet a l'air vraiment trop bien [9] !!! Mais il va sans doute trop loin.)

8. Il me semble néanmoins avoir entendu l'un des membres de la première heure dire que : si les catégories étaient arrivées plus tôt... ils ne se seraient pas emmerdés avec la théorie des ensembles. Mais ça me semble être dit avec trop de recul, de détachement quasiment. Je n'y crois que moyennement... En parlant de recul... tant que j'y pense : je me rends compte que mon premier contact avec la théorie des ensembles ""pure"" (les histoires de ZF, ZFC...), s'est faite avec Lê Nguyên Hoang de *Science4All*. Quand j'ai vu l'emprise qu'il pouvait avoir sur ma manière de concevoir les choses, je me suis vite éloigné. Aujourd'hui, j'en suis tout aussi content. (Je l'ai totalement lâché à partir de son "virage bayésien".)

9. Rohhhh, qu'est-ce qu'il faut que je me le procure !!!

> Non, la théorie des ensembles, ce n'est pas dessiner des patates et des flèches... c'est élaborer en une théorie mathématique notre exploration de l'infini, ni plus, ni moins. Non, la théorie des ensembles n'est pas le système fondationnel unique des mathématiques... c'est un des systèmes possibles, tout comme par exemple la récente théorie homotopique des types. Non, l'entier 2 n'est pas l'ensemble $\{0, \{0\}\}$... celui-ci n'est qu'une représentation de l'entier 2 par un ensemble. Non, la non-prouvabilité de l'hypothèse du continu à partir du système ZF n'indique pas que la question doive rester à jamais ouverte... c'est juste le signe que les bases axiomatiques actuelles sont incomplètes : le système ZF a d'ores et déjà été amendé, et le sera probablement à nouveau dans le futur. Oui, la théorie des ensembles est une magnifique théorie qui, peu à peu, apporte de la lumière dans le monde de l'infini, et Oui, même si les détails sont parfois arides et exigeants, il est possible de bien saisir les grandes étapes de son cheminement.C'est le sujet de ce livre.

Sur la manière de faire et la "profondeur de l'étude", un peu comme pour tous les sujets de cette partie introductive, on va se limiter à l'esprit de ce qui pourrait être exigible par quelqu'un n'étant pas dans le supérieur (certes, la théorie des ensembles n'est pas *stricto sensu* étudiée dans le secondaire, mais faut pas déconner non plus, on est sur les bases des bases (on ne va juste pas aller trop trop loin)). Et, si il y a à l'avenir besoin de bases plus formelles, on reprendra tout au propre.

Il n'y a pas vingt mille plans possibles : bah, fondements axiomatiques puis on déroule ce que l'on peut en faire! (C'est en revanche sans doute un peu trop tôt pour proposer la construction des nombres. Va falloir réussir à trouver des motivations autres!)

#### 1.2.3.1 Fondements axiomatiques

Je me souviens avoir vu en seconde des petits bouts de théorie des ensembles où l'on nous présentait l'intersection, l'union etc... avec des patates. C'est bien mignon, mais on va essayer d'aller un peu plus loin, disons. De mémoire (et j'en suis absolument certain), aucune référence à de quelconques axiomes, aucune problématique sur les fondations. Bref, on voyait des patates. Est-ce là vraiment si dérangeant? À quoi bon développer tout un paradigme pour ne jamais s'en servir? Aujourd'hui, ça n'a aucune utilité de construire des fondements solides si c'est pour en faire si peu. Bien malheureusement, je suis relativement très déçu du peu de choses que l'on a vu au lycée. Le constat demeure simple, il pourrait être intéressant de réfléchir à cette question (dans une partie précédente, que je ferai plus tard). Les idées de Lafforgue [Laf16] [10] relèvent d'un certain "bon sens" (dans une certaine mesure je les souhaite, mais aucunement dans l'état actuel des choses). Lafforgue semble totalement déconnecté de la réalité. Et c'est justement à cela qu'il va falloir que l'on s'accroche : je n'ai ni les connaissances ni l'envie pour faire quelque chose de réellement propre, surtout en telle matière.

De manière un peu décevante, on va commencer par une vue un peu "cataloguée" de la chose. On va voir les systèmes d'axiomes (les axiomatiques).

Il y a un écueil dans lequel j'aimerais ne pas tomber, mais d'une manière ou d'une autre je "pécherai". Ne confondons pas représentation d'un objet et l'objet lui même.

**1.2.3.1.1 Catalogue d'axiomes faits maison** Efforçons nous de nous convaincre que nous ne savons rien. Partons du principe que nous ne sommes (pour l'instant) doté d'aucune ou quelconque forme de logique. Rien, strictement rien. C'est tout ce que nous avons pour le moment : rien. Donc réfléchissons tout d'abord sur cela. [11]

---

Cette quatrième de couverture du livre de Dehornoy [Deh17] me fait vraiment me rendre compte à quel point je peux être fermé d'esprit sur la question et avoir un avis arrêté au possible (alors que je n'y connais strictement rien, je suis juste bourré de pré-avis).

10. Peut-être aussi bon de noter que Lafforgue a une "certaine vision sur les choses" que je commence à peine à découvrir. J'aimerais bien m'intéresser à, évidemment, son travail mais aussi à sa personne.

11. Suite à une discussion, je me suis demandé s'il était préférable de (et si j'allais ou pas) suivre la présentation d'un manuel tout bien tout fait ou bien essayer de me salir un peu les mains? Je pense que je vais essayer de reconstruire plus ou moins les choses par moi même (pas dans le sens "réinventer" mais plutôt m'inspirer de ce qui existe déjà au fur et à mesure et essayer de bâtir petit à petit un truc qui me semblera arriver où j'étais censé arriver (c'est-à-dire à un résultat relativement similaire à celui du manuel tout bien fait; donc, moyens différents mais finalités convergentes). Donc, **vais-je vraiment faire de la théorie des ensembles à ce titre?** Dans l'idée oui, dans la pratique pas exactement exactement.

**1.2.3.1.1.1 Le néant : *le vide*** Dans cette partie, on est globalement censé parler d'ensembles. Mais... cette sous-partie nous pose immédiatement des limites : les premières limites auxquelles nous devons être confrontés : le vide. Afin de pouvoir parler du vide, encore faut-il supposer qu'il existe !

**Axiome 1.2.1.** Le vide existe.

Il nous reste encore quelque peu de chemin à parcourir avant de pouvoir énoncer qu'un *ensemble* vide puisse exister.

Oh, et tant que l'on y est, définissons le signe vide :

**Définition 1.2.2** (par convention)**.** Le signe vide est représenté par le symbole $\varnothing$.

**Remarque.** On ne définit aucunement le signe vide ! On lui donne simplement un symbole, on lui attribue une représentation de pur style, de pure forme et aucunement de pur sens !

**Remarque.** Historiquement et usuellement, on attribue l'introduction d'une telle notion à André Weil (même si un symbole relativement similaire existait déjà sous la plume de von Neumann).

Est-il possible de supposer que "moins" que le vide puisse exister ? Ou, dit d'une manière plus intéressante pour la suite : va-t'il être possible de fonder les "théories" que l'on va vouloir sur une base "plus petite" que celle du vide ? De tels raisonnements sont, à l'heure actuelle, hautement dangereux : nous ne possédons rien et raisonnons déjà téléologiquement, sur des finalités, sur ce que l'on voudrait. En théorie, 1) il n'y a même pas encore de théorie "concevable" (gné) et surtout 2) (mais ce sera une question qu'il conviendra de se poser bien plus tard) peut-on attendre un quelconque comportement d'un ensemble de règles prédéfinies (par exemple pour démontrer tel ou tel théorème, il appert bien plus idoine de se situer dans cette "manière de penser") ?

Sans doute, de manière liminaire et sans réellement pouvoir faire beaucoup de déductions, nous pouvons déjà poser cette question et créer une "spécification" de l'objet question à l'objet axiome afin de pouvoir déterminer les "caractéristiques essentiels" des objets eux-mêmes et surtout des relations apparentes et existantes de l'un vers l'autre et de l'autre vers l'un. Ainsi : l'axiome postulant que *le vide existe* engendre-t'il un comportement inhérent à sa forme, à sa qualité et à ses capacités ? En réalité, on ne peut, pour l'instant, pas se poser ce genre de questions... on aurait besoin de tout un tas de procédures de "*spécifications*", d'évaluation du "comportement" d'un objet... Nous sommes donc quelque peu bloqués. Mais, ne peut-on réellement rien faire ? Raisonnons par anticipation : *le vide existe*, très bien, mais cela ne nous donne strictement aucune information sur sa "position", sa "constructibilité", sur l'utilisation que l'on peut en faire...

Qu'est-ce que l'existence (pour un objet ; et qu'est-ce qu'un objet) ? Une telle question est problématique. Ne faudrait-il pas requérir à l'existence pour supposer l'existence ? (En ce sens, une chose ne pourrait exister que si 1) *concrètement*, on a la capacité d'étudier (d'une quelconque manière) son existence (donc en existant) ou (plus généralement) 2) *abstraitement* et dans une optique d'utilisation de référentiels, sa propre nature conduit irrémédiablement à avoir besoin d'un environnement pré-existant au sien (donc premier recours à la notion d'existence) qui lui même existe car se réfèrent à une autre notion existant elle même (deuxième recours à la notion d'existence; et ainsi de suite, en cascade, "par récurrence" donc problématique, surtout quand on suppose qu'il n'existe que le vide (enfin, on a pas exactement supposé ça...)) ou 3) *abstraitement* et "par nature", la substance de l'objet serait conséquence de son existence, or la substance est existence, donc problème ou 4) ... (exemples constructibles ainsi de suite...).

Est-ce que la notion d'existence est alors bonne à prendre? Sans doute qu'on la prend car on a pas franchement mieux sous la main... Sans même entrer dans les débats de problème de représentation d'un objet en lien avec son existence (dans le sens, il n'est aucunement difficile "d'écrire des choses n'existant pas" ou totalement fausses), on semble (de nouveau!) bloqué. Est-ce là seulement bon de se poser ce genre de questions pour "faire" des Mathématiques? Si c'était pour *les* faire (les Mathématiques), franchement, aucun problème à entrer dans de tels questionnements. Mais "juste" pour démontrer des choses... on serait tenté de dire que :

> tant que je suis les règles, bohhh franchement je ne devrais avoir aucun problème! Et puis, si les règles sont "fausses", ce n'est pas ma faute, je n'y ai jamais touché après tout. Au pire, j'en prendrai de nouvelles et je verrai ce que je peux faire avec!

Parce que l'on (veut) reste(r) à un niveau très élémentaire, on ne va pas vraiment essayer de "chercher des réponses". L'occasion se présentera plus tard! Se poser des questions est un bon début. Si l'on veut avoir du contenu pour concevoir "proprement" voire "bien" ce genre de problématiques, il faut avancer! (Je me pose néanmoins toujours la question du : et si j'avance trop, ne vais-je point perdre pied et être trop influencé par des idées ancrées en moi? En gros, ne vais-je pas agir et penser "comme un vieux"?)

Une petite remarque tout de même qui va fixer un cadre à nos axiomes, une limite à ne pas dépasser : le champ d'application des axiomes ne peut pas en théorie être "métamathématique" (non?). Le champ d'application ne peut pas porter sur les théories en elles-mêmes (par exemple postuler que "les règles du jeu sont les bonnes"). Pourquoi? Car sinon ça revient simplement à considérer "axiome" ce qui devrait être "théorème".

Après ces quelques remarques, on oublie toujours le cœur du problème. Certes, on a (un peu) parlé de l'articulation des objets entre eux ainsi que de la notion d'existence mais qu'est-ce que le vide? La manière dont l'introduit Godement [God69] me gêne. Il va utiliser ce qui sera pour moi une finalité :

> Soit $X$ un ensemble; parmi les parties de $X$ figure $X$ lui-même, ce qui permet de considérer l'ensemble
>
> $$\varnothing = X - X$$
>
> qu'on appelle la **partie vide** de $X$; la relation $x \in \varnothing$ est donc équivalente à la conjonction des relations
>
> $$x \in X \text{ et } x \notin X$$
>
> de sorte qu'il n'existe évidemment aucun objet $x$ tel que $x \in \varnothing$.

L'ensemble $\varnothing = X - X$ ne dépend pas de l'ensemble $X$ – autrement dit, on a

$$X - X = Y - Y$$

quels que soient les ensembles $X$ et $Y$ ; en effet, $X - X$ et $Y - Y$ n'ont pas de mal à posséder exactement les mêmes éléments, puisqu'ils n'en possèdent aucun...

**Remarque** (7)**.** La démonstration précédente n'en est cependant pas une; d'après le Théorème 2 on doit prouver que la relation $x \in X - X$ et la relation $x \in Y - Y$ sont équivalentes; désignant par $R$ la relation $x \in X$ et par $S$ la relation $x \in Y$, tout revient à prouver que le relation

$$R \text{ et } (\text{non}R)$$

est équivalente à la relation

$$S \text{ et } (\text{non } S)$$

ce qui provient du fait plus général que, quelles que soient les relations $R$ et $T$, la relation

$$(R \text{ et } (\text{ non } R)) \implies (\text{non}T)$$

est vraie (§ 0, *Exercice 2*).

L'ensemble $\varnothing = X - X$, qui est donc toujours le même, s'appelle aussi pour cette raison **ensemble vide**; il ne possède aucun élément, plus exactement la relation $x \in \varnothing$ est fausse quel que soit $x$.

Il est clair qu'on a

$$\varnothing \subset X$$

pour tout ensemble $X$, et cette propriété caractérise l'ensemble vide; car si deux ensembles $A$ et $B$ vérifient $A \subset X$ et $B \subset X$ pour *tout* ensemble $X$, on voit en particulier que $A \subset B$ et $B \subset A$, d'où $A = B$.

Godement développe et va plus loin que le terme jusqu'où j'irai pour ce premier axiome. Néanmoins, il soulève certains points importants (une sorte de propriété "fondamentale" que seul l'ensemble vide possède). En revanche, sa manière de définir l'ensemble vide, quoique consistante (a priori), me déplaît. J'en suis au tout premier axiome et je ne peux aucunement utiliser la logique des axiomes d'une théorie des ensembles plus poussée que celle que j'ai pour définir l'ensemble vide...

De nombreuses questions se bousculent : peut-il y avoir "plusieurs vides différents" ? même s'il possède une "représentation", le vide existe-t'il [12] réellement? Que pourrait-il se passer si nous considérions plusieurs vides? On ne peut pas vraiment répondre à cette question tant que l'on a pas dit ce que l'on attendait du vide! Qui plus est, si l'on posait un nouvel axiome pour par exemple dire qu'il n'existe qu'un seul vide, serait-ce vraiment un axiome? A priori non, il se pourrait qu'un autre axiome permette de démontrer un tel résultat (cf. l'axiome d'extensionnalité). En clair, un axiome doit vraiment apporter une information

12. Fausse question qu'il conviendrait de reformuler car, dû au premier axiome, la réponse à une telle question est triviale. Non pas une question d'existence mais plutôt de fondement : le vide est-il "fondé" ?

nouvelle (mais pas trop, ça doit se cantonner à quelque chose de "fondamental"). Peut-on alors mettre en place des "procédures de contrôle" ? C'est-à-dire, (par exemple) ajouter une information à notre axiome qui servira de comparaison avec les autres axiomes et si les informations se recoupent, ont des points communs (pour plusieurs axiomes différents) alors c'est bien que l'on a foiré un truc dans la mesure où (au moins) deux axiomes disent (au moins partiellement) des choses similaires. Aucune idée.

Bon, reprenons notre histoire. Nous savons que le vide existe ! Wooow ! Ça nous en fait une belle jambe... (bah non, de tels objets n'existent pas encore.) Nous sommes encore loin des ensembles, mais dans quelle direction pourrions nous aller ? Est-il bon de, de suite, proclamer qu'il existe des "choses" "quelque part" ayant "telle forme" et se comportant "ainsi" (c'est-à-dire des ensembles) ? Ne pourrait-on pas essayer de les faire émerger petit à petit ? Ou tout autre chose ?

J'y pense, je suis con, dire que le vide existe n'a "rien" de mathématique... [13] Je ne vais pas non plus aller l'écrire sous forme de prédicat mais il va falloir que je fasse attention à l'avenir.

En faisant quelques recherches, bien que ça apparaisse très naturel [14] de commencer avec "rien" pour ensuite construire des choses petit à petit, on peut se passer de l'axiome posant l'existence du vide en utilisant la logique du schéma de compréhension et en posant qu'est équivalent à l'ensemble vide tout ensemble défini tel que ses éléments soient ceux vérifiant une propriété toujours fausse : or on ne peut pas vérifier une propriété fausse, donc il n'y a aucun élément ; de ce fait, le vide existerait. J'avoue être un peu dérangé, à voir !

Avant de continuer, il ne faut pas oublier de rappeler que l'on travaille avec des représentations [15] d'abstractions ! Revenons à nos moutons !

Désormais que l'on sait que le vide existe, on aimerait bien pouvoir en faire quelque chose ! Plusieurs manières de procéder semblent s'offrir : bâtir des choses en se servant du vide et en postulant l'existence d'une forme d'un ensemble vide, introduire un élément d'extranéité dans lequel vivrait nécessairement le vide et travailler en construisant de nouveaux objets petit à petit... Bref, ça paraît un peu fade... Il sera intéressant de s'intéresser en profondeur aux problèmes de fondements ! (Sans oublier que tout travail sérieux en pareil domaine semble se concentrer sur un travail de fond tant sur le langage lui même qui permet d'exprimer les idées que sur la représentations d'abstractions qu'essaie(nt) de saisir le(s) langage(s).)

13. J'ai d'ailleurs pu découvrir dans le livre d'une amie étudiante à la Sorbonne que dans son cours de *philosophie des sciences* était démontré l'existence du vide ! Comment faire ? (De mémoire.) On postule que pour qu'une chose puisse bouger on a besoin d'un espace. Or les choses peuvent bouger, donc l'espace existe et par une sorte de dualité le vide aussi. Outre qu'à mes yeux ça ne représente que n'importe quoi, que ce ne soit pas constructif et que ça ressemble plus à un serpent qui se merde la queue qu'autre chose, ce genre de choses n'avance aucunement !

14. Encore faut-il que le mot "naturel" ait le moindre sens !

15. Dans un rapport que j'ai écrit (Zellidja, 2019), je partais de ce bloc de questions : *Est-il possible de catégoriser, structurer une quelconque représentation d'une quelconque donnée ? Si oui, pour une donnée constitutive quelconque d'une quelconque structure, comment peut-on la classifier ? Quelles propriétés a la classification ?* Je mettais alors au point un axiome d'existence d'au moins une représentation d'un objet mathématique / mathématisable arbitraire. Ensuite, on pose l'ubiquité des représentations ; et, de là, on construit une infinité de théorie des "représentations". **Je ne veux pas d'une théorie qui donne des fondements mais plutôt d'une théorie qui recouvre les objets mathématiques (et (surtout) leur représentations) afin de pouvoir *conséquemment* et *substantiellement* regarder divers systèmes de fondements comme des objets mathématiques eux-mêmes (et, de fait, étudier leurs représentations).** À voir...

**1.2.3.1.2 Axiomes classiques** On omet l'axiome de l'ensemble vide étant donné qu'on en a parlé précédemment et, qu'apparemment, il est possible de le déduire du schéma de compréhension.

#### 1.2.3.1.2.1 Extensionnalité

**Axiome 1.2.3** ([Kri14]). Pour que l'ensemble $A$ soit égal à l'ensemble $B$, il faut et il suffit que tout élément de $A$ soit élément de $B$ et inversement. Autrement dit :

$$A = B \equiv (A \subset B \text{ et } B \subset A) \tag{1.1}$$

#### 1.2.3.1.2.2 Paire

**Axiome 1.2.4** ([Kri14]). $A$, $B$ étant des ensembles, il existe un ensemble qui a comme élément $A$ et $B$ (et eux seulement).

#### 1.2.3.1.2.3 Réunion

**Axiome 1.2.5** ([Kri14]). Étant donné un ensemble $A$, il existe un ensemble $B$ dont les éléments sont les ensembles qui appartiennent à un élément de $A$.

#### 1.2.3.1.2.4 Ensemble des parties

**Axiome 1.2.6** ([Kri14]). Pour tout ensemble $A$, il existe un ensemble $B$ dont les éléments sont le sous-ensembles de $A$. Cet ensemble est noté $\mathcal{P}(A)$.

#### 1.2.3.1.2.5 Infini

**Axiome 1.2.7** ([Kri14]). Il existe un ensemble $A$ tel que $\emptyset \in A$ et $six \in A$ alors $x \cup \{x\} \in A$.

#### 1.2.3.1.2.6 Axiome de fondation

**Axiome 1.2.8.** Tout ensemble $A$ non vide possède un élément minimal (pour la relation d'appartenance, notée $\in$).

#### 1.2.3.1.2.7 Schéma d'axiomes de compréhension

**Axiome 1.2.9** ([Kri14]). Étant donné un ensemble $A$ et une propriété $P(x)$ (portant sur un ensemble variable $x$), il existe un ensemble $B$ dont les éléments sont ceux, parmi les éléments de $A$, qui ont la propriété $P(x)$.

#### 1.2.3.1.2.8 Schéma d'axiomes de remplacement / de substitution

**Axiome 1.2.10** (sans entrer dans les détails). Soit $E(x, y, a_1, \ldots, a_k)$ un énoncé dont les paramètres sont les $a_i$ et qui définit une relation fonctionnelle $f$ à un argument. Soit $A$ un ensemble quelconque. Alors, il existe un ensemble $B$ dont les éléments sont exactement les images par $f$ des éléments de $A$ qui se trouvent dans le domaine de $f$.

##### 1.2.3.1.2.9 Axiome du choix ?

**Axiome 1.2.11** ([Kri14]). Pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides, il existe une fonction $f$ de domaine $I$ telle que $f(i) \in A_i$ pour tout $i \in I$.

#### 1.2.3.2 Théories alternatives, ouvertures

### 1.2.4 Introduction rudimentaire à la théorie des catégories

Dès le début du lycée, chez un ami, je m'étais posé une question. Je n'avais alors aucune idée de ce que pouvait être la théorie des catégorie et, sans vraiment faire exprès, j'avais construit un jeu d'axiome qui ressemblait étrangement à celui d'Eilenberg et MacLane [eSM45] (page 237). Je n'avais pas essayé d'en tirer directement les conséquences. Toutefois, dans le fil de l'année, une camarade m'avait conseillé d'essayer "d'appliquer ça au langage". Je me suis empressé et, frivolement, je m'étais amusé à "catégoriser" certaines structures du langage, des figures de style... Rien de vraiment intéressant mais c'était "mignon".

C'est ensuite lors de mon séjour en Italie que j'ai trouvé à la Bibliothèque Nationale centrale de Florence que je suis tombé sur le fameux papier d'Eilenberg et MacLane. J'étais tout content, mon idée n'était pas foireuse.

Je n'ai jamais étudié la théorie des catégories, en revanche, j'ai "beaucoup" (tout est relatif...) lu dessus. Il y a eu les posts de Maxtimax *Catégories : casser quelques malentendus* qui ont bien retenu mon attention ! Je n'en ai pas franchement retenu grand chose (au-delà des grandes grandes lignes) !

Récemment, en feuilletant les cours d'Alain Troesch [Tro21b] et [Tro21a], j'ai pu voir des petits hors programmes sur la théorie des catégories. En substance, les voici :

> La notion de structure et de morphisme associé permet de définir la notion de catégorie. Grossièrement, une catégorie est la donnée :
>
> – d'une classe d'objets ;
> – de flèches entre ces objets ;
> – d'une règle de composition entre les flèches.
>
> Par exemple, la catégorie des monoïdes est la catégorie dont les objets sont les monoïdes, les flèches sont les homomorphismes de monoïdes, et la composition des flèches correspond à la composition usuelle des homomorphismes (la composée de deux homomorphismes étant encore un homomorphisme, donc une flèche de la catégorie). On définit de même la catégorie des groupes, ou la catégorie des anneaux, ou encore la catégorie des corps.

Cette notion de catégorie nous permet de travailler dans un certain contexte. Se donner une une catégorie permet de se concentrer sur un certain type d'objets, et un certain type d'applications, et de les étudier d'un point de vue formel.

La notion de catégorie dépasse largement le cadre de l'étude des structures algébriques, car si les structures algébriques fournissent des catégories, de nombreuses catégories sont issues d'autres contextes, comme :

- la catégorie des ensembles, les morphismes étant toutes les applications ;
- la catégorie des ensembles ordonnées, les morphismes étant les applications croissantes ;
- la catégorie des espaces topologiques, les morphismes étant les applications continues ;
- ou encore, la catégorie des catégories, les morphismes étant les foncteurs de $C$ dans $D$, associant à chaque objet de $C$ un objet de $D$, et à chaque flèche de $C$ une flèche de $D$, tout en respectant un certain nombre de règles de compatibilité ;
- ou encore, des catégories de foncteurs entre deux catégories, les objets étant cette fois des foncteurs, et les flèches étant des "transformations naturelles" entre foncteurs...

Cette petite introduction nous cache (évidemment) beaucoup de détails (même si elle est très riche). On va essayer d'y piger quoi que ce soit ! Néanmoins, on est un peu embêté car, en théorie, c'est mieux d'avoir plein d'exemples dans sa poche (ou son sac). Or, pour l'instant, on a pas construit grand chose... On va essayer de "moyenner". Reprendre cette théorie serait typiquement intéressant avec une bonne maîtrise de la topologie, des espaces vectoriels, des corps, modules, groupes... Pour l'instant, on ouvre juste les yeux et fait quelques constats.

Sur le *phorum* (les-mathématiques.net) on m'a conseillé [Pro19], que j'avais déjà pu relativement entamé (tout en prenant une petite dizaine de pages de notes, en faisant les trente premiers exercices). Je pense que c'est manifestement trop tôt pour vouloir l'ingérer (d'autant plus pour une petite partie comme celle ci). J'ai trouvé trois références [Max21], [Sat10] et [Hor20], que je vais utiliser abondamment dans cette partie.

Essentiellement, le problème de cette *petite introduction à la théorie des catégories* réside dans le fait qu'elle arrive bien trop tôt ! On n'a jusqu'alors construit aucun objet et on voudrait raisonner sur des objets... Pour le peu que l'on puisse dire pour l'instant, il semblerait que la théorie des catégories vienne se poser en creux comme l'une des possibilités de donner corps et des moyens à une telle citation de S. Banach :

*Un mathématicien est une personne qui peut trouver des analogies entre les théorèmes, un meilleur mathématicien est une personne qui peut voir des analogies entre les preuves et le meilleur mathématicien est celui qui peut remarquer les analogies entre les théories. On pourrait imaginer que le mathématicien ultime est celui qui peut voir les analogies entre les analogies.*

#### 1.2.4.1 Buts de la théorie des catégories ?

À première vue, du peu que je sache, la théorie des catégories semble avant tout être un **langage** qui va s'implanter et s'adapter à la morphologie d'un quelconque énoncé mathématique ("*le langage est une peau*", Roland Barthes). On va ré-exprimer selon un langage surplombant une idée concrète. À cela, on va réunir et trouver un dénominateur commun à différentes idées, ce qui permettra de *court-circuiter le "simple" circuit* du raisonnement sur l'objet seul. On va raisonner sur ses relations avec ce qui l'entoure logiquement. On veut trouver le **cadre naturel** accompagnant un objet, typiquement et notamment concernant l'ensemble de ses transformations et relations aux objets qui l'entourent.

À première vue, une **catégorie** semble être une beauté / un monstre d'abstraction. Voici comment Hormière [Hor20] les introduit :

> Intuitivement, une catégorie est une sorte de graphe orienté, formé d'objets et de flèches entre ces objets, appelées morphismes. Les objets sont les éléments d'un ensemble ou d'une collection plus vaste, et on a une composition des flèches, qui généralise la composition des applications entre ensembles.

**Définition 1.2.12.** Une **catégorie** $\mathcal{C}$ est définie par :

1) la donnée d'une collection **Ob** $\mathcal{C}$ dont les éléments sont appelés les **objets** de la catégorie ;
2) la donnée, pour tout couple $(A, B)$ d'objets de $\mathcal{C}$, d'un ensemble noté $\mathbf{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ ou $\mathbf{Hom}(A, B)$ (si aucune confusion n'est à craindre concernant la catégorie considérée), dont les éléments sont appelés les **flèches** ou **morphismes** de **source** $A$ et de **but** $B$.
3) la donnée, pour tout triplet $(A, B, C)$ d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application de $\mathbf{Hom}(A, B) \times \mathbf{Hom}(B, C)$ dans $\mathbf{Hom}(A, C)$ qui, à toutes flèches $u : A \to B$ et $v : B \to C$ associe une flèche $A \to C$, dite **produit** ou **composée** de $v$ par $u$, et notée $v \circ u$. Ces applications $(u, v) : v \circ u$ doivent vérifier les deux axiomes suivants :
   a) **Associativité** : si $u, v$ et $w$ sont trois flèches telles que $\tau(u) = \sigma(v)$ et $\tau(v) = \sigma(w)$, alors :

   $$(w \circ v) \circ u = w \circ (v \circ u) \tag{1.2}$$

   cette flèche, cette composition en cascade, sera notée sans ambiguïté $w \circ v \circ u$. Plus généralement, si $u_1, \ldots, u_n$ sont $n$ flèches de $\mathcal{C}$ telles que $\tau(u_i) = \sigma(u_{i+1})$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on notera leur composée, élément de $\mathbf{Hom}(\sigma(u_1), \tau(u_n))$ : $u_n \circ \cdots \circ u_1$.

b) **<u>Élément neutre</u>** : pour tout objet $A$ de $\mathcal{C}$, il existe un élément $1_A \in$ **Hom**$(A, A)$ neutre pour la composition en ce sens que

$$1_A \circ u = u \text{ pour toute flèche } u \text{ de but } A \tag{1.3}$$

$$v \circ 1_A = v \text{ pour toute flèche } v \text{ de source } A \tag{1.4}$$

cet élément neutre est unique car si $e$ en est un autre appartenant à **Hom**$(A, A)$, on a alors : $1_A = 1_A \circ e = e$. On l'appelle **flèche unité** ou **neutre de** $A$.

**Remarques.** La collection **Ob** $\mathcal{C}$ du premier point **peut être plus vaste qu'un ensemble**, un ensemble étant, au sens naïf, une "*petite*" collection. Ainsi, **Ob** $\mathcal{C}$ pourra être la collection de tous les ensembles (attention de ne pas tout mélanger avec le paradoxe de Russel).
Concernant le deuxième point, si $(A, B)$ et $(A', B')$ sont deux couples distincts d'objets de $\mathcal{C}$, les ensembles **Hom**$(A, B)$ et **Hom**$(A', B')$ n'ont aucun élément en commun, de sorte qu'une flèche $u$ de $\mathcal{C}$ a une source et un but bien déterminés $A = \sigma(u)$ et $B = \tau(u)$. En d'autres termes, l'inexistence d'élément en commun permet de ne pas confondre buts et sources de divers couples <u>distincts</u> de $\mathcal{C}$
De l'ensemble des axiomes vus ci-dessus, il résulte que $(\mathbf{Hom}(A, A), \circ) \cong (\mathbf{End}(A), \circ)$ est un monoïde (magma associatif unifère). On aura suffisamment l'occasion de revenir sur cela plus tard !

En ayant introduit ces quelques petites règles sur les flèches, on entre dans un monde nouveau : celui des **diagrammes** (commutatifs). On va pouvoir représenter des situations mathématiques avec des diagrammes : seront représentées des relations entre les objets d'une catégorie $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire des éléments de **Ob** $\mathcal{C}$) et lesdits objets eux-mêmes.

Par exemple, comment représenter la composition de la définition 1.2.12 précédente ? C'est tout simple !

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{B} \arrow[dr, "v"] & \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "v\circ u"] & & \mathbf{C}
\end{tikzcd}$$

Pour l'associativité ($n = 3$) (où l'on a rajouté, en gris, des compositions possibles) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "v\circ u"'] & \mathbf{B} \arrow[dl, "v"'] \arrow[d, dashed, "w\circ v"] \\
\mathbf{C} \arrow[r, "w"] & \mathbf{D}
\end{tikzcd}$$

Et enfin les flèches unités que possèdent chacun éléments de $\mathcal{C}$ :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[loop below, "1_{\mathbf{A}}"] \arrow[r, bend right] & \mathbf{B} \arrow[l, bend right] \arrow[loop below, "1_{\mathbf{B}}"]
\end{tikzcd}$$

On voit donc des objets et leurs relations. La philosophie des catégories semble pouvoir être réduite et vulgarisée ainsi que l'a fait Malgoire [Mal16] :

> *La "philosophie" des catégories est de mettre l'accent sur les morphismes plutôt que sur les objets eux-mêmes. [...]* ***Et un objet est connu si l'on connaît ses relations à tous les autres objets.***

Dans cette logique, A. Prouté [Pro19] présente l'un des objets fondamentaux de la théorie des catégories :

> *On peut, à l'aide de ce qu'on appelle un "****problème universel****", caractériser la plupart des objets mathématiques par leur comportement global vis-à-vis des autres objets de la même sorte. Une définition par un problème universel n'assure pas l'****existence**** de l'objet qui est défini, mais elle a toujours un sens, que cet objet existe ou n'existe pas. C'est d'ailleurs ce qui permet éventuellement de dire qu'il n'existe pas, car avant d'affirmer qu'une chose n'existe pas, il faut quand même la définir.*
>
> *Bien qu'un problème universel définisse un objet sans le construire, il assure son* ***unicité "à isomorphisme canonique près****. Quand l'objet défini par le problème universel existe, il y a le plus souvent de nombreuses manières de le construire, exactement comme il y a de nombreuses manières de réaliser un logiciel même s'il est spécifié sans ambiguïté. L'expression "à isomorphisme canonique près" signifie que si on a deux constructions de l'objet, il y a une et une seule manière de convertir l'une en l'autre et réciproquement, de même qu'en informatique, pour deux manières différentes d'implémenter les données d'un certain type, il y a un algorithme de conversion d'une représentation vers l'autre et réciproquement, algorithme dont l'effet est déterminé de manière unique. Ces remarques "informatiques" laissent entrevoir que la théorie des catégories est tout aussi importante dans cette discipline qu'en mathématiques. D'ailleurs, les informaticiens montrent souvent moins de réticence à utiliser des catégories que les mathématiciens eux-mêmes.*

Suite à quoi, Prouté, appuie sur la notion de **transformation naturelle** comme motivation à l'introduction des *foncteurs* (i.e. des morphismes *sur* la catégorie) et *catégories*. C'est sur ces mêmes considérations historiques (travaux de Samuel Eilenberg et Saunders MacLane [eSM45]) que Maxtimax [Max21] commence son post (en donnant l'exemple du morphisme de Hurewicz (qu'est-ce???) : $\pi_1(X,x) \to H_1(X)$).

Il semblerait que la théorie des catégories veuille accaparer et donner une peau commune à des objets aussi divers qu'un homomorphisme ou un biholomorphisme voire des relations d'ordre. Le revers de la médaille semble être qu'un si grand élan de généralité freine, paradoxalement, à la démonstration de "*vrais théorèmes*" (pour reprendre les termes de Maxtimax) [16]. À côté de ces objets et de la caractérisation de leurs relations (entre eux, à travers eux, au-dessus d'eux) se développe une constellation (voire même une sorte de "combinatoire") de l'univers des possibles. On va chercher, semble-t'il, à utiliser un objet au-regard de ce que produit une "catégorie" d'autres dans l'optique de bien cerner le

16. Il ne faut pas y comprendre qu'il existe de "vrais" et de "faux" théorèmes. Non. Disons simplement que certains sont plus ""*justes*"" que d'autres, plus "intéressants", plus "adaptés", plus "utiles", plus "ciblés".

fonctionnement du premier et de pouvoir l'utiliser sereinement. On aura sans doute là plutôt un langage commode pour se poser des questions qu'un outil d'attaque directe de problèmes. En somme, "*beaucoup de résultats qui pourraient parasiter notre compréhension des choses se réduisent à des principes presque langagiers facile à retenir, précisément parce qu'ils sont formels et essentiellement triviaux*" ([Max21]).

#### 1.2.4.2 Langage catégorique, introduction

Il y a tout un vocabulaire, je suppose post-Grothendieck[17], qui est apparu : objet catégorique, d'origine géométrique, d'origine fonctorielle... Il semblerait qu'il y ait aujourd'hui un nouvel essor provenant des travaux de Scholze et de ses collaborateurs. L'ensemble de ces termes semble former un tout cohérent bien que d'apparence très éparse et hétérogène. À cette symphonie catégorique semble s'ajouter tout un *gloubiboulga* homotopique, homologique, cohomologique... Plein de belles choses!

Afin de voir le vocabulaire et avec une petite idée de la "matière", j'ai pris dix polycopiés (issus de ma bibliothèque numérisée) et je vais désormais regarder et "étudier" (un peu en détail) les sommaires. On rentrera dans "les vifs" du / des sujet(s) lors de la prochaine section (même si, il faut bien l'admettre, on ira pas forcément très loin).

Voici les dix polycopiés en question : [Lei16], [FS18], [Fok94], [Awo05], [Rie14], [Mil19b], [BW95], [Hue87], [Tuy16] (le dernier étant un petit peu spécial et pas centré sur de la théorie des catégories généraliste, apparemment).

On trouve tout un nouveau vocabulaire : *foncteur, transformation naturelle, adjoint, choses* et *co-choses* (e.g. *limites* et *colimites*), *dualité, grosses, petites* et *localement petites catégories, (pré)faisceaux, correspondance de Galois, monoïdes*, **Set**, **Bool**, **Grp**, **Ban**, *opérades, topos, isomorphismes, épimorphismes..., produits, sommes, extension* (par exemple *de Kan*), $2$-*catégories*, ..., $\infty$-*catégories*, curryfication, théories de Lawvere... Et ça, c'est sans parler de tous les concepts "dérivés" (*higher category theory*, dans la théorie des schémas, l'algèbre homologique, en logique mathématique, les histoires de *globular* trucs...).

On se permet de faire quelques petits rappels de vocabulaire (issus du [Awo05]) :

**Définition 1.2.13.** Soit une flèche (un morphisme) $f : A \to B$. Alors :

- $A = \mathrm{dom}(f)$ (domaine de $f$).
- $B = \mathrm{codom}(f)$ (codomaine de $f$).

**Remarque.** Lorsque l'on considère la composition $g \circ f : (A \to B) \to C$, alors $\mathrm{codom}(f) = B = \mathrm{dom}(g)$.

#### 1.2.4.3 Développements catégoriques préliminaires

Il y a bien un chapitre qui a l'air intéressant dans le livre de Riehl [Rie14] : *E.1. Theorems in basic category theory*, mais c'est encore un peu trop tôt. Pour l'instant, que savons nous de la théorie des catégories? Grossièrement rien mis à part la définition d'une catégorie et ce à quoi ça pourrait servir.

17. Cet article [Krö06] peut potentiellement être intéressant, tout autant que sa thèse [Krö04].

Awodey [Awo05] présente de manière intéressante la théorie des catégories. Et, rien que basé sur ses premières lignes et la morphologie générale de son polycopié, je pense le suivre pour essayer de commencer à me frayer un chemin dans ce monde. (J'en profite pour noter qu'il y a un cours d'*Algèbre homologique* de Taillefer et Bichon qui a l'air trop bien. J'ai l'impression que durant tout le début de leur cours, ils introduisent des objets certes mais évacuent aussi tous les trucs qui n'ont pas franchement d'intérêt / dont le résultat est "trop intuitif" / qui mènent à un truc "nul" (exemple : l'homologie d'un espace topologique contractile). Et ensuite ça décolle ! Je manque cruellement d'intuition géométrique...).

Il n'est pas ici de lieu de tout démontrer, on découvre simplement. On a rencontré et va continuer à rencontrer beaucoup d'éléments de catégories mais on ne va pas démontrer directement que la chose en question est bien une catégorie (ce sera intéressant à faire plus tard, lorsqu'on suivra un cours de théorie des catégories).

Il y a quand même quelque chose qui me dérange / me surprend un peu : "*Of course, the objects of a category don't have to be sets, either*". Oui oui *of course*, mais j'avoue être un peu stupéfait dans la mesure où 1) je croyais que l'on avait pas de définition vraiment satisfaisante de la notion d'ensemble et 2) je ne connais pas de truc qui ne soit pas un ensemble (je croyais que tout était ensemble, sauf le tout du tout). Mais bon, ça ne semble pas être le plus important ici puisque : "*It's the arrows that really matter!*". Néanmoins, je reste assez perturbé par cela. Mais, il semblerait que j'ai une conception trop généraliste de la notion d'ensemble. Apparemment, les nombres ne sont pas des ensembles (même s'ils peuvent avoir une représentation ensembliste ?). Ah bah : "*It is convenient, technically useful, and interesting to be able to express reasoning about numbers in a formalism made for reasoning about sets, but one should not confuse the model for the things it models. It is perfectly possible to reason about numbers without committing to the philosophical baggage of set theory*" [hma16]. Puis, après ça parle d'arithmétique du second ordre ou bien des exemples sont donnés de trucs qui ne sont pas des ensembles : l'ensemble de tous les ensembles par exemple (paradoxe de Russel).

Premier résultat qui me bluffe bien que très rudimentaire : on peut construire **Cat**, la catégorie de toutes les catégories. Apparemment, pour ne pas y voir un paradoxe mais plutôt une déduction logique il faudrait sortir du paradigme de la théorie des ensembles et aller se "réfugier" / découvrir les univers de Grothendieck (?) [RG11]. Mais ce n'est pas très clair pour moi, j'ai l'impression qu'il me faudrait absolument tout reprendre, en partant de strictement *zéro* avec un formalisme quasiment excessif et une rigueur vigoureuse. Toutefois, certains disent qu'un tel objet n'existe pas... or, A. Grothendieck, M. Artin, J.-L. Verdier, P. Deligne et B. Saint-Donat dans [Gro65] et [BAG+06] ne semblent pas avoir de "scrupule" à manier un tel objet (en utilisant l'univers de Grothendieck!). Je pense que c'est surtout un problème de fondements et de ses présupposés. Quoique, je suis totalement perdu... apparemment faudrait regarder des "petites catégories" ? gné. Et pire encore, quoique ça aille dans la direction de ce qui vient d'être dit (mais ça n'arrange pas mon désarroi) : ds [Awo05], est présenté un "relatif équivalent" du théorème de Cayley (tout groupe $G$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(G)$) : toute catégorie **C** est *essentiellement* la même qu'une catégorie où les objets sont des **ensembles** et les flèches des fonctions. On semble néanmoins devoir supposer que **C** ne soit pas "trop grosse" [18]. Je conjecture dans tous les sens là et n'avance pas. Comme je me l'étais mis en note :

> Je pense qu'à un moment je vais craquer et partir dans un formalisme et une rigueur excessive ! Y'aurait des indices de partout, ce sera imbitable, mais tout sera pointé ; aucun doute ne sera permis (e.g. si on manipule des morphismes de groupe, c'est explicitement visible dans la formule et ça se distingue des morphismes d'un autre groupe ou encore de morphismes d'anneau...).

On va voir notre premier bon petit gros objet : le foncteur. Il va être défini de manière gentillette :

**Définition 1.2.14.** Un foncteur

$$F : \mathbf{C} \to \mathbf{D} \tag{1.5}$$

entre deux catégories **C** et **D** est une application qui transporte les objets sur les objets et les flèches sur les flèches. D'une telle manière, on a donc :

- (a) $F(f : A \to B) := F(f) : F(A) \to F(B)$ ;
- (b) $F(g \circ f) := F(g) \circ F(f)$ ; et,
- (c) $F(1_A) = 1_{F(A)}$.

De fait, en découle, tout naturellement, des résultats type : un homomorphisme entre deux monoïdes $M$ et $N$ n'est rien d'autre qu'un foncteur entre $M$ vu comme une catégorie et $N$ regardé comme une catégorie. J'ai l'impression que c'est une simple application du point *(a)* mais j'ai aussi l'impression de ne pas être 100% à l'aise avec de tels concepts.

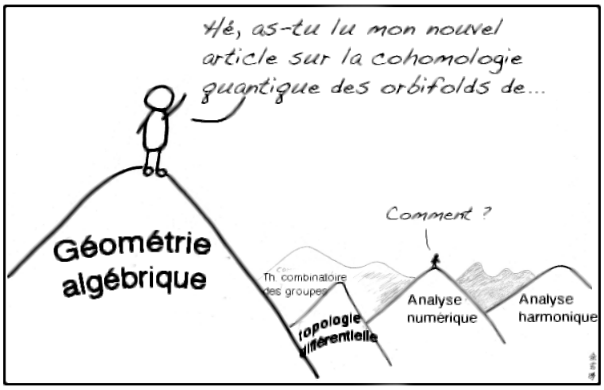
Est-ce que désormais on peut construire un truc "un étage au-dessus" des foncteurs ? Faudrait alors, par parallélisme de construction, un truc un étage au-dessus des catégories. Plus généralement, il semblerait y avoir toute une hiérarchie, une arborescence des foncteurs : un $-1$-foncteur serait une implication, un $0$-foncteur serait une fonction, un $1$-foncteur serait un foncteur usuel, un $2$-foncteur serait un type de foncteur sur une $2$-catégories (et il y aurait un raffinement de la notion dans la mesure où il existerait plusieurs types de $2$-foncteurs) et ainsi de suite jusqu'à l'infini. Et puis il y aurait des trucs type : les $(\infty, n)$-foncteurs, gné.

J'ai l'impression que si on prend son temps, que l'on construit bien les choses (et si en plus on a des motivations à côté, algèbre ou autre) : tout vient tout seul et très facilement.

Et c'est globalement déjà la fin de cette petite introduction très rudimentaire (et qui pose plus de questions que n'apporte de réponses). Il ne fait pas vraiment d'intérêt à poursuivre plus loin (mis à part pour démontrer des lemmes de diagrammes, des résultats de dualité, de représentations...). Il sera bien plus intéressant de tout reprendre et de poursuivre lorsque l'on aura plus d'exemples et de matière !

18. Me semble avoir entendu, sans doute A. Connes et quelqu'un d'autre, maugréer sur la définition de petites et grosses catégories. Je ne suis pas certain qu'utiliser la notion d'ensemble (même pour faire une passerelle) en théorie des catégories ne vienne pas totalement foutre la merde...

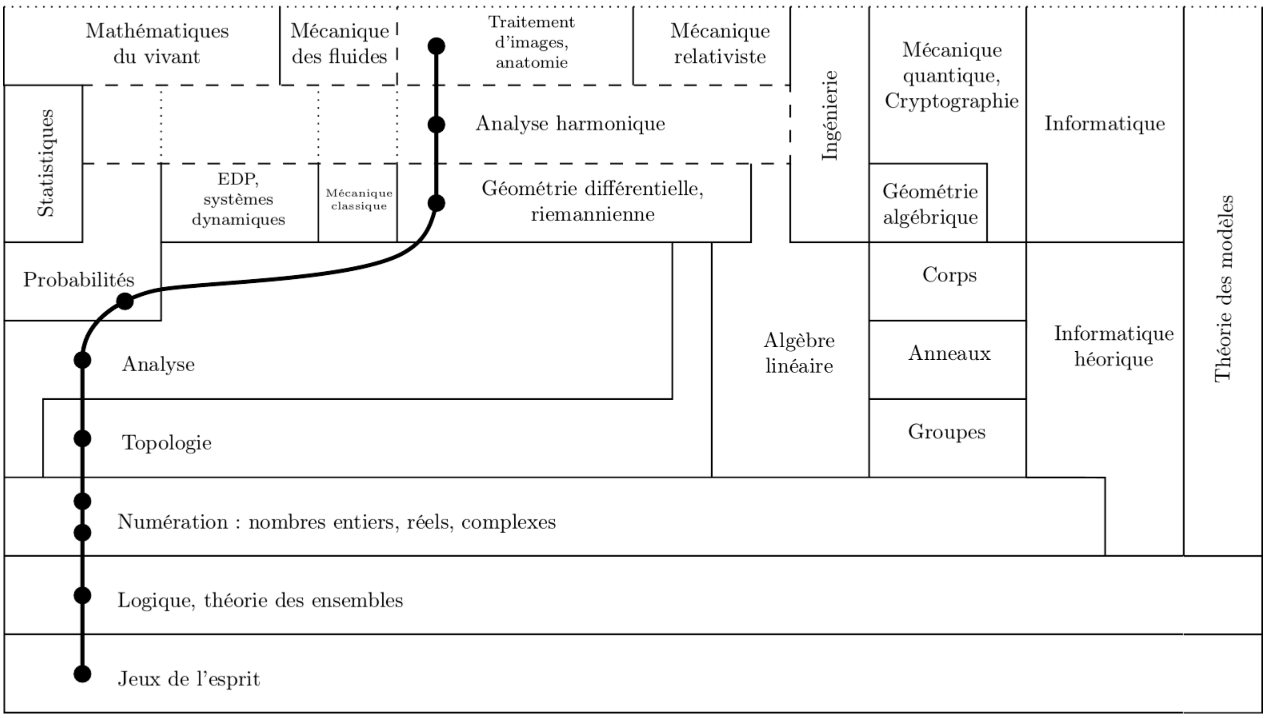
## 1.2.5 (Petit) Panorama




**Le paysage des mathématiques modernes**

Si un livre m'a bien marqué et a commencé à me faire avoir une vision relativement globale (à moindre échelle) des Mathématiques, c'est bien le cours de *Culture Mathématique* de Jean Feydy [Fey18] ! (J'attends d'ailleurs avec impatience la mise à jour, mais je ne sais pas vraiment si c'est moi qui l'ai loupé ou bien si elle n'est pas (encore ?) disponible.)

À part certaines parties, le document est très accessible (je me souviens l'avoir lu en seconde). L'idée n'est pas tant de construire rigoureusement des choses mais plutôt de montrer que c'est possible de le faire (si je ne dis pas de bêtises). On pourra retrouver dans le graphique suivant une "vue aérienne" du document.




Bon dieu, qu'est-ce que la partie sur l'anatomie computationnelle m'a marqué !! C'est vraiment le chapitre où j'étais lâché sur les détails techniques mais, la manière dont c'était rédigé me laissait penser deux trois choses et avoir l'impression d'avoir une intuition sur de tels objets (que nenni) (j'ai eu le même sentiment en regardant, sans rien y comprendre, la série de conférence du cours de Villani sur la théorie de la courbure synthétique de Ricci [Vil15]. Il m'amusait vraiment!). Je crois que depuis je suis marqué par des idées du type :

> ok, on va essayer de voir à quel point la déformation de tel objet coûte. Ah, merde! ça créé des déchirures, des singularités. Boh, est-ce que l'on aurait pas une manière de contrôler le "coût du transport" en introduisant une sorte de "coût" de régularisation"? [19]

En gros, je crois que j'aime bien faire violemment quelque chose en me foutant de briser des symétries et ensuite essayer de réparer les pots cassés et de recoller les morceaux. J'aime bien cette idée. Typiquement, mais de manière "plus fine" ou plus réaliste, il y a des formules trop belles chez [Fey18] :

$$\mathcal{C}_k^{X,Y}(\sigma) = \underbrace{\sum_m \|x^m - y^{\sigma(m)}\|^2}_{\text{coût de transport}} + \underbrace{\sum_{m,m'} k(x^m, x^{m'}) \cdot \|y^{\sigma(m)} - y^{\sigma(m')}\|^2}_{\text{coût de régularisation}} \tag{1.6}$$

Bref, cet ouvrage a vraiment fait naître chez moi un désir de découvrir (peu être un peu trop pendant un temps, en dépit de toute rigueur et de toute construction sérieuse pour l'avenir; mais ça c'est entièrement ma faute, aujourd'hui, j'en "paie les frais" et j'y remédie).

Tant qu'on est sur les "bons souvenirs", rohhh, il y avait la thèse de Lairez [Lai14] et plus généralement des exposés au CMAP (Polytechnique) de (surtout) Clément Dupont [Dup19] et de Javier Fresàn [Fre19] sur les périodes! J'aimerais vraiment réussir à comprendre, un jour, cette histoire d'utilisation d'une période intégrale, convertie en équation différentielle (en utilisant l'équation de Picard-Fuchs? qu'est-ce?) pour démontrer des identités sur des sommes. (Mais au-delà de ça, il y a tout un complexe de théories algébriques, cohomologiques ou que sais-je encore!) En gros, utiliser la *période d'intégrale rationnelle* suivante :

$$\int\int \frac{xy}{(xy)^2 + t(1-xy)^2(1+x)^2(1+y)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.7}$$

pour passer à l'équation différentielle suivante :

$$t(27t+1)y'' + (54t+1)y' + 6y = 0 \tag{1.8}$$

afin d'obtenir l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \binom{2n}{k}^3 = (-1)^n \frac{(3n)!}{n!^3} \tag{1.9}$$

J'ai déjà eu l'occasion de faire ça sur des exemples microscopiques... mais là il semble y avoir une manière générale de faire qui me dépasse. Nous viendrons à ces choses sans doute un jour... En attendant :

19. Je me souviens d'ailleurs qu'à l'époque (fin seconde), j'étais assez intéressé par ces idées donc j'ai naïvement cherché "théorie des déformations – mathématiques". Ça devait être la première fois que j'avais sous les yeux des trucs imbitables d'algèbre. Je ne savais pas que l'algèbre était plus que du "calcul algébrique" à l'époque (je crois). J'ai eu sous les yeux des histoires de *lifting Galois representations* (qu'est-ce? Boh). Je trouvais ça *étrange* (j'utilise ce mot car j'ai l'album de Laylow en fond sonore).

Essayons de faire un petit panorama rapide des Mathématiques en présentant quelques petits objets, juste visuellement. On va placer des repères![20, 21] (En soi, on présente plus quelques petits résultats (accessibles en Terminale) qu'autre chose.)

Traditionnellement, les Mathématiques sont *découpées* en différentes branches (découpage qui n'est ni uniformément accepté, ni très clair (et dont on voit mal comment et surtout pourquoi il devrait l'être) a tel point que peut exister un débat sur le fait de savoir si l'on parle de Mathématiques ou bien d'*une* Mathématique). L'algèbre, la géométrie, l'analyse, l'arithmétique, la théorie des nombres, la topologie, les probabilités, la logique, les statistiques... (sans même parler des mathématiques appliquées et déclinées...). De manière plus précise, dans le *Princeton Companion* [GBGL+08] on trouve une liste plus détaillée : théories algébriques, analytiques, computationnelles des nombres; géométrie algébrique; géométrie arithmétique; topologie algébrique; topologie différentielle; *moduli spaces*; théorie des représentations; théorie géométrique et combinatoire des groupes; analyse harmonique; équations aux dérivées partielles; dynamique; algèbres d'opérateurs; symétrie miroir; *vertex operator algebras*; combinatoire énumérative et algébrique; *extremal and probabilistic combinatorics*; théorie de la complexité; analyse numérique; théorie des ensembles; processus stochastiques; théorie des probabilités; géométrie en grande dimension... (et beaucoup d'autres : transport optimal, théorie de la mesure, analyse fonctionnelle, théorie de Galois, théorie des graphes, cryptographie, algébrique linéaire, théorie de Lie, théorie des catégories, des modèles...). Pour une petite présentation de 250 théorèmes "fondamentaux" en Mathématiques, cf [Kni18].

Maintenant, étant donné que je n'ai pas envie de faire des copier / coller bêtes et méchants du *Princeton Companion* ou autre, je vais filer dans ma bibliothèque numérique (5372 fichiers) et m'arrêter quand ça m'intéresse et recopiant quelques résultats "beaux".

#### 1.2.5.1 Méthode de résolution de l'équation de degré 5

On nous met en tête que si on recherche les racines d'un polynôme du cinquième degré, c'est mort d'avance. Oui c'est mort, à moins d'utiliser la théorie des fonctions elliptiques (voir par exemple le résultat de 1858 d'Hermite, dans le développement 7.5.5). Une présentation, somme toute assez accessible, est disponible sous la plume d'étudiants d'Yves Laszlo [eECdV98].

**Proposition 1.2.15** ([eECdV98], **méthode de Perron**)**.** Afin d'exprimer (à l'aide de périodes (?)) les solutions d'une équation polynomiale du cinquième degré $X^5 + AX^4 + BX^3 + CX^2 + DX + E = 0$, on procède ainsi par étape :

- (*1ère étape*) : transformation de Tschirnhausen;

20. Cette étape va être facilitée notamment par un ancien projet [Gar22] où j'avais fait des recherches bibliographiques et avait construit une sorte de plan d'une dizaine de pages où je m'étais amusé à découpé les Mathématiques "en tranche" par matières. Malheureusement, il est bien trop tôt pour réaliser l'objectif de ce document (qui finalement correspond relativement à celui ci, à cela près que l'objectif d'*Apprendre en écrivant* n'est pas spécifiquement l'analyse de Fourier sur des groupes. Sans doute que l'on en fera ici (je l'espère), mais dans quelques temps. J'ai d'ailleurs assisté à un exposé de Félix Miguel (8 avril 2022) sur l'analyse de Fourier sur des groupes abéliens finis, il y démontrait un théorème de Dirichlet.)

21. En y pensant, je suis un peu dérangé... Comment vraiment faire un panorama "intéressant" si je dois me limiter au Mathématiques de Première et de Terminale? Gné.

- (*2ème étape*) : obtention d'une *équation principale* : $z^5 + 5az^2 + 5bz + c = 0$;
- (*3ème étape*) : utilisation de polynômes de polyèdres;
- (*4ème étape*) : travail sur l'équation de Brioschi;
- (*5ème étape*) : théorème de Perron;
- (*6ème étape*) : équation de Jacobi $s^6 + \frac{10}{\Delta}s^3 - \frac{12g_2}{\Delta^2}s + \frac{5}{\Delta^2} = 0$; et,
- (*7ème étape*) : fonction de Weierstrass, évaluation de périodes.

#### 1.2.5.2 Identité remarquable *au service de* $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$

**Proposition 1.2.16** ([Ber]). Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![1, n]\!]$ :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}(k^r - 1) = \begin{cases} n! + (-1)^n & \text{si : } r = n \\ (-1)^n & \text{si : } r < n \end{cases} \tag{1.10}$$

De cette proposition, on peut en déduire le théorème de Wilson (si $n = r$) ou la structure cyclique du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$.

#### 1.2.5.3 Logarithme complexe

On se réfère à [Hul13].

Dans le domaine réel, l'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une bijection croissante. Son inverse est le logarithme népérien, noté $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$.

Dans le domaine complexe, l'application $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective mais **non injective**. Lorsque $z \in \mathbb{C}^*$, on peut écrire $z = \exp(w)$, où $w$ est **un** logarithme de $z$, défini à $2i\pi$ près. Quand $z = \exp(x + iy) = \exp(x)\exp(iy)$ :

- la partie réelle de $z$, soit $x = \log|z|$, est bien définie; et,
- la partie imaginaire $y$, définie à $2\pi$ près, est **un** argument de $z$.

Apparemment, il n'existe pas de détermination **continue** du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ tout entier. Il va exister toute une pléiade de détermination du logarithme sur des restrictions de $\mathbb{C}^*$.

#### 1.2.5.4 Une remarque sur l'évanouissement de l'intégrande en l'infini

Comme le fait remarquer Roger Cuculière [Cuc08] :

> la théorie des séries et la théorie des intégrales impropres (ou généralisées) présentent de nombreuses analogies. Il est toutefois une propriété des séries qui n'a pas d'analogue pour les intégrales généralisées, c'est le théorème qui affirme que **si** une série converge, **alors** son terme général tend vers $0$ (réciproque évidemment fausse !).
>
> En effet, le théorème analogue pour les intégrales généralisées, *s'il existait*, serait : « si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ existe, alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ». Nombre d'élèves

croient à l'existence de ce théorème, renforcés dans leur croyance par le fait que c'est ce que l'on constate dans la quasi-totalité des exemples habituels.

Mais cette assertion est **fausse**, comme le montre l'exemple de l'intégrale de Hardy :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t^\beta \sin^2(t)} \mathrm{d}t \tag{1.11}$$

(pour certaines valeurs $\alpha$ et $\beta$).

Ce qui est vrai, c'est que **si** l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ existe et **si** la fonction $f$ admet une limite quand $x$ tend vers l'infini, **alors** cette limite est nulle.

Ce serait pas mal de réfléchir précautionneusement à un tel énoncé. (Et en profiter pour s'intéresser à l'intégrale de Hardy!)

#### 1.2.5.5 Inégalité de Hadamard

**Proposition 1.2.17.** Pour toute matrice **réelle** carrée $N = (n_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on a la majoration :

$$|\det N| \leqslant \prod_{1\leqslant j\leqslant n} \sqrt{\sum_{1\leqslant i\leqslant n} |n_{ij}|^2} \tag{1.12}$$

#### 1.2.5.6 Formule d'Harriot

**Proposition 1.2.18** ([Borue]). Soit $T$ un triangle sphérique, on a :

$$\frac{\mathrm{Aire}(T)}{R^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi \tag{1.13}$$

où $R$ est le rayon de la sphère et où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont les angles intérieurs définis par les tangentes aux géodésiques.

**Remarque.** Notons que le terme $\frac{1}{R^2}$ est la courbure de Gauss de la sphère de rayon $R$.

#### 1.2.5.7 Inégalité de Carleman

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leqslant e \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \tag{1.14}$$

#### 1.2.5.8 Égalité étonnante

La fonction définie par

$$\sum_{\substack{\text{discriminant de } Q=5 \\ Q(x)>0>Q(+\infty)}} Q(x) \tag{1.15}$$

est constante et vaut 2. Il existe beaucoup de généralisations "enfantines" puis des résultats "pour les grands" comme le démontre don Zagier [Zag99].

#### 1.2.5.9 Théorème d'Ax-Grothendieck, cas $\mathbb{C}^n$

**Théorème 1.2.19.** Soit $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ une application polynomiale. Si $P$ est injective, alors $P$ est bijective.

#### 1.2.5.10 Polygones constructibles

**Lemme 1.2.20.** Les angles de la forme $\frac{\widehat{2\pi}}{2^\alpha}$ sont constructibles, où $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Soient $m$ et $n$ dans $\mathbb{N}^*$, avec $\text{pgcd}(m,n) = 1$, alors dire que l'angle $\frac{\widehat{2\pi}}{mn}$ revient à dire que les angles $\frac{\widehat{2\pi}}{m}$ et $\frac{\widehat{2\pi}}{n}$ le sont également.
En conséquence, un polygone régulier à $n = \prod p_i^{a_i}$ est constructible si et seulement si les angles $\frac{\widehat{2\pi}}{p_i^{a_i}}$ le sont.

**Théorème 1.2.21** (Gauss-Wantzel)**.** Soit $p$ un nombre premier impair et $\alpha$ appartenant à $\mathbb{N}^*$.
Alors, dire que l'angle $\frac{\widehat{2\pi}}{p^\alpha}$ est constructible revient à dire que $\alpha$ est égal à $1$ et que $p$ est un nombre premier de Fermat (c'est-à-dire que $p$ est de la forme $1 + 2^{2^\beta}$, où $\beta \in \mathbb{N}$).

#### 1.2.5.11 Théorème fondamental des polynômes symétriques

**Théorème 1.2.22.** Soit $k$ un anneau commutatif arbitraire. La sous-algèbre $k[X_1, \dots, X_n]^{S_n}$ des polynômes symétriques est engendrée sur $k$ par les polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \dots, \sigma_n$. De plus, ces éléments sont algébriquement indépendants sur $k$ Donc, tout polynôme symétrique $S$ s'écrit de façon unique comme un polynôme $P(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$. En résumé, on a un isomorphisme :

$$k[X_1, \dots, X_n]^{S_n} \cong k[\sigma_1, \dots, \sigma_n] \tag{1.16}$$

#### 1.2.5.12 Polynômes de Zernike

Basé sur l'article de Pierre Strock [Str08]. Ces polynômes semblent permettre de *décrire les aberrations des systèmes optiques* (?) et *sont bien adaptés pour décrire la forme d'une onde passant par une pupille circulaire* (?).

Il existe les polynômes *pairs* de Zernike :

$$^{p}Z_n^m(\rho, \varphi) := R_n^m(\rho)\cos(m\varphi) \tag{1.17}$$

et les polynômes *impairs* de Zernike :

$$^{i}Z_n^m(\rho, \varphi) := R_n^m(\rho)\sin(m\varphi) \tag{1.18}$$

où
$$R_n^m(\rho) := \sum_{s=0}^{n-m} \frac{(-1)^s (2n-m-s)!}{s!(n-s)!(n-m-s)!} \rho^{2n-2s-m}. \tag{1.19}$$

Ces polynômes sont orthogonaux ("*par intégrale continue sur la pupille circulaire*" (?)), *pour chaque terme, sa moyenne sur l'ensemble de la pupille est nulle* (sauf si $n = m = 0$) et *l'écart type de chaque polynôme est minimal.*

#### 1.2.5.13 Polynômes de Ore ?

Je signale juste un article de Xavier Caruso [Car18] et une implémentation en Sage [KJJ15] !

#### 1.2.5.14 Inégalités isopérimétrique et isodiamétrique

**Proposition 1.2.23** ([Rus17])**.** Soit un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (ça se généralise en dimension supérieure), alors :

$$\text{Aire}\ \Omega \leqslant \frac{(\text{Périmètre}\ \Omega)^2}{4\pi} \tag{1.20}$$

et, l'égalité a lieu si et seulement si $\Omega$ est un disque.

**Proposition 1.2.24** ([Rus17])**.** Pour tout $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\text{mesure}(A) \leqslant \text{mesure}(B(0,1)) \frac{\text{diamètre}(A)^n}{2^n} \tag{1.21}$$

(à noter que la mesure s'effectue en dimension $n$).

#### 1.2.5.15 Critère d'Abel

**Proposition 1.2.25.** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites numériques telles que :

- la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit réelle, décroissante et de limite nulle, et
- la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit telle que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles de $\sum b_n$ soit bornée.

Alors $\sum a_n b_n$ converge.

#### 1.2.5.16 Sommes exponentielles sur un corps fini

On considère la somme $S$ définie comme étant égale à :

$$\sum_{\substack{x\in\mathbb{F}_p \\ g(x)\neq 0}} \exp\left(\frac{2i\pi}{p} f(x)/g(x)\right) \tag{1.22}$$

où $p$ est un nombre premier et $f$ et $g$ des polynômes à valeur dans $\mathbb{F}_p$.

Comme l'identifie Kowalski [Kowue], on trouve quatre buts :

1. donner une expression explicite de $S$ ;
2. trouver une borne supérieure (non triviale) de $S$ ;
3. trouver une borne inférieure de $S$ (mais c'est moins important quel la borne supérieure) ; et,
4. lorsque l'on fait dépendre $S$ d'un paramètre, réussir à comprendre comment varie $S$ en fonction de ce paramètre.

Ça paraît très innocent comme domaine de questionnement mais faut pas s'étonner de voir les fonctions $L$ & *cie* rappliquer !

# Chapitre 2

# Le langage mathématique

## 2.1 La notion de langage

### 2.1.1 Présentation (linguistique, informatique, mathématique)

### 2.1.2 Évolutions du langage mathématique ?

Un simple petit constat : recopions une citation, plus ou moins au hasard, dans un papier de Go Yamashita [Yam10] sur le travail de Shinichi Mochizuki dans l'optique de prouver la conjecture $abc$ (Oesterlé–Masser) (?) :

**Définition 2.1.1.** We call this canonical reduction of the $(L^\times)^\wedge$-torsor $\mathrm{Sect}(D_y \twoheadrightarrow G_L)$ to the canonical $O_L^\times$-torsor **the canonical integrable structure** of $D_y$, and we say that a section $s$ in $\mathrm{Sect}(D_y \twoheadrightarrow G_L)$ is **compatible with the canonical integral structure of** $D_y$, if $s$ comes from a section of the canonical $O_L^\times$-torsor. We call the $L^\times$-torsor obtained by the push-out of the canonical $O_L^\times \to L^\times$ **the canonical discrete structure** of $D_y$. Let $\widehat{\mathbb{Z}}'$ denote the maximal prime-to-$p$ quotient of $\widehat{\mathbb{Z}}$, and put $(O_L^\times)' := \mathrm{Im}(O_L^\times \to (L^\times) \otimes \widehat{\mathbb{Z}}')$ (*et ainsi de suite...*)

Et encore, j'ai montré quelque chose de "présentable"... Si l'on regarde cela par exemple :

**Proposition 2.1.2.** Let

$$^\dagger\mathcal{HT}^{\boxtimes\boxplus}$$

be a $\boxtimes\boxplus$-Hodge theatre with associated $\boxtimes$- and $\boxplus$-Hodge theatres $^\dagger\mathcal{HT}^{\boxtimes}$, $^\dagger\mathcal{HT}^{\boxplus}$ respectively. Let $\{^\alpha\mathfrak{F}\}_{\alpha\in\mathbb{S}_j^*}$ be a $j$-capsule of $\mathcal{F}$-prime-strips. We consider $\mathbb{S}_j^*$ as a subset of the index set $J$ appearing the $\boxtimes$-Hodge theatre ${}^{\dagger}\mathcal{HT}^{\boxtimes}$ via the isomorphism ${}^{\dagger}\chi : J \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}_l^*$ of Proposition 10.19. We assume that for each $\alpha \in \mathbb{S}_j^*$, a $\mathfrak{log}$-link

$$ {}^{\alpha}\mathfrak{F} \xrightarrow{\mathfrak{log}} {}^{\dagger}\mathfrak{F}_{\alpha} $$

(i.e., a poly-morphism $\mathfrak{log}({}^{\alpha}\mathfrak{F}) \xrightarrow[\sim]{\text{poly}} {}^{\dagger}\mathfrak{F}_{\alpha}$ of $\mathcal{F}$-prime-steps) is given. Recall that we have a labelled version $({}^{\dagger}\overline{\mathbb{M}}^{\circledast}_{\text{mod}})_j$ of the field ${}^{\dagger}\overline{\mathbb{M}}^{\circledast}_{\text{mod}}$ (See Corollary 11.23 (1), (2)). We call

$$ ({}^{\dagger}\overline{\mathbb{M}}^{\circledast}_{\text{mod}})_{\mathbb{S}_j^*} := \bigotimes_{\alpha \in \mathbb{S}_j^*} ({}^{\dagger}\overline{\mathbb{M}}^{\circledast}_{\text{mod}})_{\alpha} $$

the **global $j$-tensor packet associated to $\mathbb{S}_j^*$ and the $\boxtimes\boxplus$-Hodge theatre ${}^{\dagger}\mathcal{HT}^{\boxtimes\boxplus}$.**

Loin de moi toute la controverse Scholze, Stix, Mochizuki (à laquelle je ne comprends rien), loin de moi toute idée sur le pourquoi du comment introduire tout cela (j'imagine que c'est utile, tout de même!). En revanche, ça me paraît tout sauf esthétique. Je suis désolé mais ce n'est pas beau! [1] Ça n'a évidemment rien à voir avec, par exemple, la correspondance (d'un autre temps...) entre Legendre et Jacobi [eL75a], [eL75b], [eL75c] et [eL75d] (que j'ai lu avec passion!) :

> En ce qui regarde mes préoccupations, j'ai entrepris un bon nombre de recherches sur différentes matières, et que je voudrais avoir finies avant de retourner aux fonctions elliptiques et aux transcendantes d'un ordre supérieur qui sont de la forme
>
> $$ \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}} $$
>
> Je crois entrevoir à présent que toutes ces transcendantes jouissent des propriétés admirables et inattendues auxquelles on peut être conduit par le théorème d'Abel, qui établit une relation entre plusieurs de ces transcendantes qui répondent à différentes valeurs de $x$. J'ai réfléchi aussi de temps en temps sur une méthode nouvelle de traiter les perturbations célestes, méthode dans laquelle doivent entrer les théories nouvelles des fonctions elliptiques.

Je suis bien conscient que, comparer quelque chose dans la "verve" de Mochizuki aux bonnes vieilles discussions du XIX$^{\text{ème}}$ est quelque peu grossier (d'autant plus que je ne suis pas loin de prendre "deux extrémités") [2].

AA FINIIIIR

> *Algebraic symbols are used when you do not know what you are talking about.*
> – Schnoebelen Philippe

Pour être très honnête (et me répéter), j'ai peur de ne pas être en phase avec la majorité de la tournure que prennent les mathématiques : ce n'est pas élégant. (Moi même ce que je fais ce n'est pas beau. Il faut s'efforcer d'être limpide et élégant.)

1. Je crois être quelque peu marqué (y comprendre, aussi peu que le maximum que je puisse à mon jeune âge) du "formalisme à la Serre".
2. Du peu que j'ai vu, il existe encore (aujourd'hui) des textes de "spécialistes", hautement techniques ainsi que rédigées admirablement bien et jolis à voir.

## 2.2 Aspects pratiques

### 2.2.1 Le raisonnement et les raisonnements

### 2.2.2 La notion de méthode

### 2.2.3 L'esprit d'un problème

### 2.2.4 Rigueur et rédaction – compilation de conseils et directives

Dans la mesure où ce projet est surtout pour moi, j'écris donc de fait essentiellement pour moi et afin de centraliser un tant soi peu l'ensemble des choses que je peux voir (essayer de cristalliser le bins). Ainsi, il ne sera donc pas très étonnant si les préceptes de cette section ne sont pas franchement très rigoureusement appliqués. Je vais essayer de faire au mieux (en proportion du fait que je n'ai pas franchement envie de trop me prendre la tête).

On se base sur un texte d'un professeur de prépa HEC (Samir Kaddouri), une compilation de commentaires de Christophe Bertault, quelques conseils d'écriture mathématique lors d'une préparation à l'agrégation externe (Matthieu Romagny), d'autres de Francis Edward Su et tout un tas d'articles regroupés par Didier Piau sur sa page (articles de Halmos [3], Knuth... [4]). En cas de besoin "encyclopédique", on pourrait se référer à [WW13].

- Écrire des Mathématiques se fait dans un français châtié. On veillera alors soigneusement aux formulations, aux respects de la langue hôtesse (ici le français). De ce fait, on ne mélangera pas abusivement symboles mathématiques et textes d'une langue naturelle au détriment de règles grammaticales, syntaxiques... En théorie, on cherche à allier la forme au fond : le fond existe ce n'est aucunement un problème (ici), encore faut-il qu'il soit parfaitement compréhensible et respecte un ensemble de règles communément admises. Par exemple, il peut être conseillé / vivement recommandé de ne jamais commencer une phrase par un symbole mathématique (e.g. quitte à alourdir on n'écrira pas "$X^n - 1$ *possède* $n$ *racines*" mais "*Le polynôme* $X^n - 1$ *possède* $n$ *racines*"). Une attention toute particulière semble devoir être apportée aux quantificateurs (qui sont réellement censés apporter du sens et non une simplification et un léger gain de temps dans l'écriture).
- Sujet + Verbe + Complément. Faire des phrases simples. Respecter la ponctuation. Majuscule. Point. Orthographe. Grammaire. Syntaxe. **Clarté**. *Complétude*. Certes, il existe un certain esthétisme ; néanmoins, il ne pourra être réellement présent qu'à partir du moment où un ensemble de règles de bases sont respectées. Les touches personnelles ne sont donc aucunement à exclure. Il faut simplement en prendre la

3. À lire !
4. Il y a une conférence de Jean-Pierre Serre : *How to write mathematics badly*, je la verrai sans doute un jour.

responsabilité et faire son choix (savoir patiemment les aborder et les introduire; le langage est destiné à évoluer!).

- De la même manière qu'en théâtre a pu prévaloir des principes d'unité de temps et de lieu, on veillera à ce que le contenu mathématique en question soit intégré dans son "environnement" tout en respectant une certaine chronologie et spatialité (on introduit pas un élément dont on a besoin après s'en être déjà servi; on essaie de respecter une certaine "beauté" dans la présentation spatiale : saut de ligne, utilisation d'environnements $\TeX$, formule d'une traite et pas coupée par un saut de ligne; les formules viennent en complément d'un texte et ne sont pas des finalités en elles-mêmes;...).
- On fait attention aux abréviations : on les définit précautionneusement en amont de leur utilisation (même si elles sont très connues). On fait, par ailleurs, attention de ne pas en abuser.
- Éviter d'avoir un texte lourd avec des notations inutiles et qui n'apportent rien. Dans la mesure du possible et dans une acceptation personnelle "raisonnable", réussir à être élégant. Plus généralement, la question de la forme peut déconcerter (*la forme, c'est le fond qui remonte à la surface*, V. Hugo). Comme le note C. Bertault : *maitrisez-vous, chaque mot et chaque symbole vous engagent.* Dans la même veine c'est la question de la cohérence même du texte qui peut se jouer sur un pur problème de forme, sur un problème stylistique (en veillant à nommer communément et correctement ses variables, à les introduire convenablement; à appliquer logiquement et non fallacieusement un énoncé au bon objet décemment identifié...)
- Tout démontrer.

  **Démonstration.** À démontrer. □
- Ne pas hésiter à aller vérifier dans tous les sens ses résultats (en cherchant dans des revues, des archives, de recueils de thèses...; en programmant, en testant à la main sur des cas relativement simples...; en vérifiant aux regards d'autres résultats si ça semble régulier et suffisamment cohérent et juste; en allant parler à droite ou / et à gauche...).
- Ne pas oublier que si l'on peut être aisément compris d'une personne, ce ne sera pas forcément le cas d'une autre (il y a là toute la question des "écoles" mathématiques, des courants de pensées, des inclinations réciproques...). On écrit certes un peu pour soi-même (mais pas dans un sens égoïste) mais surtout pour les autres dans un désir de partage et de construction de la connaissance! Ainsi, savoir qui est susceptible de nous lire (si quelqu'un est censé nous lire à un moment ou un autre) est une bonne chose.
- L'énoncé d'un résultat, quoique conséquence d'un cheminement et d'un raisonnement qui se conduit petit à petit, doit autant que possible être autonome (pour ne pas dire général). En un certain sens, il peut apparaître préférable de le rendre compréhensible sans référence extérieure ("*self-contained*"). Cela n'empêche pas la nécessité de montrer les liens entre divers énoncés et d'expliquer en quoi ils s'enchaînent, sont utiles les uns par rapport aux autres...
- Ne pas écrire pour écrire (ne mettre que ce qui est nécessaire), il y a sans nul doute un choix à faire et (en général) tout ne peut pas être dit (que ce soit pas des contraintes

afin de pouvoir publier ou autre). Qui plus est, cela prend du temps aussi bien pour celui qui écrit (à voir si on veut le passer à écrire tel ou tel paragraphe) que pour celui censé lire. (En fonction de l'audience, il peut être intéressant de sauter tels ou tels détails ou au contraire de prendre son temps sur tel ou tel point important au détriment de tel ou tel autre. Au fond, écrire des mathématiques est une activité très sociale.) Un texte mathématique peut sans doute également être intéressant par ses "non dits", les temps qu'il laisse entre l'articulation de chaque idée : veiller à bien utiliser les virgules, l'accentuation, les étapes du raisonnement : c'est une histoire qu'il faut raconter, ça se savoure !

- Adopter une structure sans équivoque. Au-delà d'une structuration de la pensée, c'est le corps même du texte mathématique qui va être présenté selon une structure qui ne sera aucunement anodine : chaque caractère est un choix... même si le choix peut être inconscient... Néanmoins, il ne faut pas forcément être un rigoriste typé droit (le fameux *syllogisme juridique*). Suivre un cheminement est essentiel (même si ça n'empêche pas quelques "envolées lyriques" si elles sont justifiées) : introduction, raisonnement, conclusion apparaît être le bon en règle générale. Il ne faut rien cacher et montrer tout le processus. Le lecteur ne doit pas se perdre dans des détails qui ne sont même pas visibles ! Il ne faut pas essayer de l'enfumer... Bien montrer ce que l'on fait peut également nous aider à ne pas nous auto-enfumer : ne pas passer à côté du problème par exemple en se concentrant sur uniquement un petit point et le développant au maximum au détriment de tout ce qui a été initialement annoncé ! Il convient simplement de *1)* continuer le travail et le mener à bien en conformité avec ce qui a été initialement présenté ou *2)* ré-écrire l'introduction et la mettre en accord avec ce qui a été finalement démontré.
- Utiliser des représentations graphiques peut-être un sacré atout pour la compréhension : que ce soit des résultats de simulations, des vidéos, des tables de données, des diagrammes, des graphes... C'est peut-être relativement long à (bien) faire mais ça peut éclairer d'un coup. Ne pas hésiter à utiliser le résultat de simulations (encore qu'il faille veiller à ce que la représentation graphique s'intègre bien dans le texte et ne soit pas redondante). En géométrie, tout particulièrement, des graphiques semblent nécessaires !
- Concernant le titre et l'*abstract* (le résumé) : ce sont généralement les seules choses qui sont lues ! À cet effet sans doute faut-il être attractif (mais pas mensonger) et réussir à présenter succinctement et synthétiquement beaucoup en en disant peu.
- Tous les problèmes de typographie, de respect de normes $\TeX$(des espacements, de l'interligne)... Se référer, par exemple, à [And15].
- Ne pas oublier que les mathématiques sont une langue à part entière avec un vocabulaire ultra spécifique et qui doit être parfaitement maîtriser (ainsi, par exemple, on ne parlera pas "grossièrement" de déplacement d'une figure géométrique mais on s'efforcera d'être précis : translation, rotation...). Encore plus difficile et préoccupant : dans certaines contrées techniques des mathématiques, des termes usuels peuvent

revêtir une signification non usuelle, intuitive (voir par exemple la notion de *démonstration* / *méthode élémentaire* en théorie des nombres).

- Dernier conseil et sans doute le plus important : on s'en fout de ses règles, elles ne sont pas faites pour être apprises par cœur, c'est un long processus de "*die and retry*" ! Soyons nous mêmes ! On ne fait pas du marketing mais de la littérature !

# Chapitre 3

# La notion d'espace

Je ne sais pas s'il existe une définition vraiment intrinsèque de la notion d'espace dans l'œuvre de Poincaré. Toutefois, on peut trouver une énumérations des principales propriétés de ce que Poincaré appelle l'**espace géométrique** dans [Poi52] :

> *Voici quelques unes des plus essentielles :*
>
> - *il est continu ;*
> - *il est infini ;*
> - *il a trois dimensions ;*
> - *il est homogène, c'est-à-dire que tous ses points sont identiques entre eux ; et*
> - *il est isotrope, c'est-à-dire que toutes les droites qui passent par un même point sont identiques entre elles.*

Il enchaîne ensuite sur des questions de **représentation** de l'espace. (Il me semble qu'il y a des considérations intéressantes chez [Ale18].) Il semble également être possible de trouver beaucoup de références à la notion d'espace chez A. Grothendieck [Gro21] :

> *La notion d' "espace" est sans doute une des plus anciennes en mathématique. Elle est si fondamentale dans notre appréhension "géométrique" du monde, qu'elle est restée plus ou moins tacite pendant plus de deux millénaires. C'est au cours du siècle écoulé seulement que cette notion a fini, progressivement, par se détacher de l'emprise tyrannique de la perception immédiate (d'un seul et même "espace" qui nous entoure), et de sa théorisation traditionnelle ("euclidienne"), pour acquérir son autonomie et sa dynamique propres. De nos jours, elle fait partie des quelques notions les plus universellement et les plus couramment utilisées en mathématique, familière sans doute à tout mathématicien sans exception. Notion protéiforme d'ailleurs s'il en fut, aux cents et mille visages, selon le type de structures qu'on incorpore à ces espaces, depuis les plus riches de toutes (telles les vénérables structures "euclidiennes", ou les structures "affines" et "projectives", ou encore les structures "algébriques" des "variétés" de même nom, qui les généralisent et qui assouplissent) jusqu'aux plus dépouillées : celles où tout élément d'information*

*"quantitatif" quel qu'il soit semble disparu sans retour, et où ne subsistent plus que la quintessence qualitative de la notion de "proximité" ou de celle de "limite" , et la version la plus élusive de l'intuition de la forme (dite "topologique"). La plus dépouillée de toutes parmi ces notions, celle qui jusqu'à présent, au cours du demi-siècle écoulé, avait tenu lieu d'une sorte de vaste giron conceptuel commun pour englober toutes les autres, était celle d'espace topologique. L'étude de ces espaces constitue l'une des branches les plus fascinantes, les plus vivaces de la géométrie : la topologie.*

*Si élusif que puisse paraître de prime abord cette structure "de qualité pure" incarnée par un "espace" (dit, "topologique"), en l'absence de toute donnée de nature quantitative (telle la distance entre deux points, notamment) qui nous permette de nous raccrocher à quelque intuition familière de "grandeur" ou de "petitesse", on est pourtant arrivé, au cours du siècle écoulé, à cerner finement ces espaces dans les mailles serrées et souples d'un langage soigneusement "taille sur pièces". Mieux encore, on a inventé et fabrique de toutes pièces des sortes de "mètres" ou de "toises" pour servir tout de même, envers et contre tout, à attacher des sortes de "mesures" (appelées "invariants topologiques") à ces "espaces" tentaculaires qui semblaient se dérober, telles des brumes insaisissables, à toute tentative de mensuration. Il est vrai que la plupart de ces invariants, et les plus essentiels, sont de nature plus subtile qu'un simple "nombre" ou une "grandeur" - ce sont plutôt eux-mêmes des structures mathématiques plus ou moins délicates, attachées (à l'aide de constructions plus ou moins sophistiquées) à l'espace envisagé. L'un des plus anciens et des plus cruciaux de ces invariants, introduits déjà au siècle dernier (par le mathématicien italien Betti), est formé des différents "groupes" (ou "espaces") dits de "cohomologie", associés à l'espace. Ce sont eux qui interviennent (surtout "entre les lignes", il est vrai) dans les conjectures de Weil, qui en font la "raison d'être" profonde et qui (pour moi du moins, "mis dans le bain" par les explications de Serre) leur donnent tout leur sens. Mais la possibilité d'associer de tels invariants aux variétés algébriques "abstraites" qui interviennent dans ces conjectures, de façon à répondre aux desiderata très précis exigés pour les besoins de cette cause-là - c'était là un simple espoir. Je doute qu'en dehors de Serre et de moi-même, personne d'autre (pas même, et surtout, André Weil lui-même!) n'y croyait vraiment. . .*

ou encore :

*On peut dire que "le nombre" est apte à saisir la structure des agrégats "discontinus", ou "discrets" : les systèmes, souvent finis, formés d' "éléments" ou "objets" pour ainsi dire isolés les uns par rapport aux autres, sans quelque principe de "passage continu" de l'un à l'autre. "La grandeur" par contre est la qualité par excellence, susceptible de "variation continue"; par là, elle est apte à saisir les structures et phénomènes continus : les mouvements, espaces, "variétés" en tous genres, champs de force etc. Ainsi, l'arithmétique apparaît (grosso modo) comme la science des structures discrètes, et l'analyse, comme la science des structures continues, Quant à la géométrie, on peut dire que depuis plus de deux mille* *ans qu'elle existe sous forme d'une science au sens moderne du mot, elle est "à cheval" sur ces deux types de structures, les "discrètes" et les "continues". Pendant longtemps d'ailleurs, il n'y avait pas vraiment "divorce", entre deux géométries qui auraient été d'espèce différente, l'une discrète, l'autre continue. Plutôt, il y avait deux points de vue différents dans l'investigation des mêmes figures géométriques : l'un mettant l'accent sur les propriétés "discrètes" (et notamment, les propriétés numériques et combinatoires), l'autre sur les propriétés "continues" (telles que la position dans l'espace ambiant, ou la "grandeur" mesurée en terme de distances mutuelles de ses points, etc.). C'est à la fin du siècle dernier qu'un divorce est apparu, avec l'apparition et le développement de ce qu'on a appelé parfois la "géométrie (algébrique) abstraite". Grosso-modo, celle-ci a consisté à introduire, pour chaque nombre premier p, une géométrie (algébrique) "de caractéristique p", calquée sur le modèle (continu) de la géométrie (algébrique) héritée des siècles précédents, mais dans un contexte pourtant, qui apparaissait comme irréductiblement "discontinu", "discret". Ces nouveaux objets géométriques ont pris une importance croissante depuis les débuts du siècle, et ceci, tout particulièrement, en vue de leurs relations étroites avec l'arithmétique, la science par excellence de la structure discrète. Il semblerait que ce soit une des idées directrices dans l'œuvre d' André Weil , peut-être même la principale idée-force (restée plus ou moins tacite dans son œuvre écrite, comme il se doit), que "la" géométrie (algébrique), et tout particulièrement les géométries "discrètes" associées aux différents nombres premiers, devaient fournir la clef pour un renouvellement de vaste envergure de l'arithmétique. C'est dans cet esprit qu'il a dégagé, en 1949, les célèbres "conjectures de Weil". Conjectures absolument époustouflantes, à vrai dire, qui faisaient entrevoir, pour ces nouvelles "variétés" (ou "espaces") de nature discrète, la possibilité de certains types de constructions et d'arguments qui jusque là ne semblaient pensables que dans le cadre des seuls "espaces" considérés comme dignes de ce nom par les analystes - savoir, les espaces dits "topologiques" (où la notion de variation continue a cours). On peut considérer que la géométrie nouvelle est avant toute autre chose, une synthèse entre ces deux mondes, jusque là mitoyens et étroitement solidaires, mais pourtant séparés : le monde "arithmétique", dans lequel vivent les (soi-disant) "espaces" sans principe de continuité, et le monde de la grandeur continue, ou vivent les "espaces" au sens propre du terme, accessibles aux moyens de l'analyste et (pour cette raison même) acceptés par lui comme dignes de gîter dans la cité mathématique. Dans la vision nouvelle, ces deux mondes jadis séparés, n'en forment plus qu'un seul. Le premier embryon de cette vision d'une "géométrie arithmétique" (comme je propose d'appeler cette géométrie nouvelle) se trouve dans les conjectures de Weil. Dans le développement de certains de mes thèmes principaux , ces conjectures sont restées ma principale source d'inspiration, tout au long des années entre 1958 et 1969. Dès avant moi, d'ailleurs, Oscar Zariski d'un côté, puis Jean-Pierre Serre de l'autre, avaient développé pour les espaces-sans-foi-ni-loi de la géométrie algébrique "abstraite" certaines méthodes "topologiques",* *inspirées de celles qui avaient cours précédemment pour les "espaces bon teint" de tout le monde. Leurs idées, bien sûr, ont joué un rôle important lors de mes premiers pas dans l'édification de la géométrie arithmétique; plus, il est vrai, comme points de départ et comme outils (qu'il m'a fallu refaçonner plus ou moins de toutes pièces, pour les besoins d'un contexte beaucoup plus vaste), que comme une source d'inspiration qui aurait continué à nourrir mes rêves et mes projets, au cours des mois et des années. De toutes façons, il était bien clair d'emblée que, même refaçonnés, ces outils étaient très en deçà de ce qui était requis, pour faire même les tout premiers pas en direction des fantastiques conjectures.*

# 3.1 Le cadre intuitif : la géométrie

## 3.1.1 Postulats d'Euclide

C'est assez perturbant, il m'a toujours semblé qu'il existait cinq postulats d'Euclide. Or, en regardant diverses traductions, je ne trouve que trois "*demandes*" (dont le sens équivaudrait à celui de *postulat*). Or, en regardant la version originale grecque [1], tout niquel : on a bien cinq postulats que voici [Perue] :

1. De tout point à tout autre point on peut tracer une ligne droite.
2. Toute droite finie peut être prolongée indéfiniment et continûment.
3. Avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite rencontre deux droites en faisant des angles intérieurs du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux angles droits.

Il est néanmoins un peu tôt pour les étudier! Commençons tout d'abord par réfléchir sur la définition de concepts géométriques. Euclide pose 23 définitions (on en trouve environ 35 dans des traductions françaises mais Perrin en donne (logiquement) 23).

---

1. Issu de [FH07] :

1. .
2. .
3. .
4.
5. , , .

### 3.1.2 Au-delà de la géométrie euclidienne, premiers pas

## 3.2 Au-delà de l'intuition : (quelques) espaces abstraits

On se permet de sortir du strict programme de Terminale non pas par simple plaisir de généraliser (abusivement) et de voir des structures somme toute très accueillantes, mais avec simplement la ferme intention de dire que les choses existent ! On aura tout le plaisir de les voir plus tard !! On pose simplement quelques bases afin d'avoir des repères pour le bon gros Chapitre 4 – *Actions sur l'espace* !

On va rester très sommaire et dans "ce que tout le monde sait bien sur les groupes / les espaces topologiques..." (donc pas de débordements sur des structures connexes ou / et amalgamées : e.g. groupe topologique...).

On va faire les choses pas à pas et en utilisant un "double langage". En effet, on a quelque peu introduit la théorie des catégories. On va alors essayé de présenter les divers énoncés à deux niveaux : la manière "habituelle" (textuelle) et celle d'un langage plus "catégorique" (je vais faire ce que je peux...). Cette partie va être structurée très simplement et les résultats vont s'enchaîner (rappelons que l'on présente surtout les choses ! pas franchement plus ! on verra plus tard ! il n'y a rien de vraiment pédagogique là...).

J'aimerais bien, un jour, réussir à retracer l'histoire de chaque notion et d'expliquer d'où ça sort et pourquoi on en a eu besoin (et surtout comment ça a pu évoluer vers ça aujourd'hui, qui en a façonné l'idée...) !

### 3.2.1 Espace métrique

On utilise [O'S06] (et on ne traduit pas les énoncés en français, on les garde en anglais).

**Définition 3.2.1** ([O'S06])**.** Suppose $X$ is a set and $d$ is a real function defined on the cartesian product $X \times X$. Then $d$ is called a **metric** on $X$ if, and only if, for each $a, b$ and $c$ in $X$ :

- (*positive property*) $d(a, b) \geqslant 0$ with equality if, and only if, $a = b$;
- (*symmetric property*) $d(a, b) = d(b, a)$ ; and,
- (*triangle inequality*) $d(a, b) \leqslant d(a, c) + d(c, b)$.

In this event, we call the set $X$ endowed with this metric a **metric space** and, for each $a, b \in X$, we call the number $d(a, b)$ the **distance** between $a$ and $b$ with respect to the metric $d$. Usually, we say simply that $X$ is a metric space ; if we need to specify the metric, we say that $(X, d)$ is a metric space.

**Théorème 3.2.2** ([O'S06]). Suppose $n \in \mathbb{N}$ and $p \in [1, +\infty[ \cup \{+\infty\}$. Then, for each $x \in \mathbb{R}^n$,

$$||x||_p := \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p} \tag{3.1}$$

is a norm on $\mathbb{R}^n$.

**Exemple.** Let $p$ be a prime number. Each non-zero rational number $x$ can be expressed as $p^k r/s$ for a unique value of $k \in \mathbb{Z}$, where $r \in \mathbb{Z}$ and $s \in \mathbb{N}$ and neither $r$ nor $s$ is divisible by $p$; we define $|x|_p$ to be $p^{-k}$. Also, we set $|0|_p$ to be $0$. The $p$-adic metric on $\mathbb{Q}$ is then defined to be $(a, b) \mapsto |a - b|_p$.

**Définition 3.2.3** ([O'S06]). Suppose $(X, d)$ and $(Y, e)$ are metric spaces and $\varphi : X \to Y$. Then $\varphi$ is called an **isometry** or an **isometric map** if, and only if, $e(\varphi(a), \varphi(b)) = d(a, b)$ for all $a, b \in X$. If $\varphi$ is an isometry, we say that the metric subspace $(\varphi(X), e)$ of $(Y, e)$ is an **isometric copy** of the space $(X, d)$.

**Remarque.** Faire attention, dans [OYV08] ils distinguent *isometric embedding* et *isometry* en fonction de si non ou oui $\varphi$ est une bijection ou pas.

**Définition 3.2.4** ([O'S06], lien avec les espaces vectoriels). Suppose $V$ is a linear space over $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. Suppose $|| \cdot ||$ is a real function defined on $V$ such that, for each $x, y \in V$ and each scalar $\alpha$, we have :

- $||x|| \geqslant 0$ with equality if, and only if, $x = 0$;
- $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$; and,
- (*triangle inequality*) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$.

Then $|| \cdot ||$ is called a **norm** on $V$, and $V$ is equipped with this norm is called a **normed linear space**. If we need to specify the norm, we say that $(V, || \cdot ||)$ is a normed linear space. For each $x \in V$, the number $||x||$ is called the **length** of $x$ with respect to the norm $|| \cdot ||$.

### 3.2.2 Espace topologique

On utilise [Pau09], [Zek10] et [OYV08].

Beaucoup des notions présentées ci-dessous présentent beaucoup de "raffinements (e.g. la *compacité séquentielle, être localement compact*...). On ne présente qu'à la va vite les choses ; on verra des choses en détail bien plus tard.

##### 3.2.2.0.1 Définition – topologie et espace topologique

**Définition 3.2.5** ([Pau09]). Un **espace topologique** est un ensemble $X$ muni d'un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de $X$ tel que :

- toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$ ; et,
- toute union d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Par abus, on note souvent $X$ le couple $(X, \mathcal{O})$. Par convention, une intersection vide de parties d'un ensemble $E$ est égale à $E$, et une union vide de parties de $E$ est égale à la partie vide. Donc $\varnothing$ et $X$ appartiennent à $\mathscr{O}$. les éléments de $\mathscr{O}$ sont appelés les **ouverts** de $X$, et $\mathscr{O}$ une **topologie** sur l'ensemble $X$. Les complémentaires des ouverts s'appellent les **fermés**. Toute union finie de fermés est fermée, toute intersection de fermés est fermée, $\varnothing$ et $X$ sont fermés. Étant donné un ensemble de parties d'un ensemble $E$, stable par intersections et par unions finies, l'ensemble des complémentaires de ces parties est une topologie sur $E$.

**Remarque** ([OYV08]). Les éléments de $X$ sont appelés **points** de l'espace topologique.

**Remarque.** Il n'est pas (si) aisé (que ça) de compter le nombre de topologies admissibles sur un ensemble fini.

**Exemple** ([Pau09]). Si $X$ est un ensemble, alors $\mathscr{O} = \{\varnothing, X\}$ est une topologie sur $X$, dite **topologie grossière**. L'espace $(X, \mathscr{O})$ est alors dit **grossier**. L'ensemble $\mathscr{P}(X)$ de toutes les parties de $X$ est une topologie sur $X$, appelée **topologie discrète**. L'espace topologique $(X, \mathscr{P})$ est alors dit **discret**. "*Être grossier*" et "*être discret*" sont des propriétés invariantes par homéomorphismes.

**Exemple** ([Pau09]). Si $(X, d)$ est un espace métrique, en notant $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x \in X$ et de rayon $r > 0$, alors l'ensemble des parties $U$ de $X$ telles que :

$$\forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U \tag{3.2}$$

est une topologie sur $X$, appelée **topologie induite par la distance**.

##### 3.2.2.0.2 Homéomorphisme, continuité

**Définition 3.2.6** ([Pau09]). Une bijection $f : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est un **homéomorphisme** si l'image réciproque par $f$ de la topologie de $Y$ est la topologie de $X$. Deux espaces topologiques $X$ et $Y$ sont **homéomorphes** s'il existe un homéomorphisme de $X$ dans $Y$. "*Être homéomorphe à*" est une relation d'équivalence sur tout ensemble d'espaces topologiques. Une propriété $P$ sur les espaces topologiques est dite **invariante par homéomorphismes** si tout espace topologique homéomorphe à un espace topologique ayant la propriété $P$ admet aussi la propriété $P$.

**Définition 3.2.7** ([OYV08]). Let $X$ and $Y$ be two topological spaces. A map $f : X \to Y$ is **continuous** if the preimage of any open subset of $Y$ is an open subset of $X$.

**Définition 3.2.8** ([OYV08]). A map $f$ from a topological space $X$ to a topological space $Y$ is said to be **continuous at a point** $a \in X$ if for every neighborhood $V$ of $f(a)$ there exists a neighborhood $U$ of $a$ such that $f(U) \subset V$.

**Remarque.** Une fonction est alors continue si et seulement si elle l'est à chaque point de $X$.

##### 3.2.2.0.3 Éléments et opérations

###### 3.2.2.0.3.1 Base d'une topologie

**Définition 3.2.9** ([Pau09]). Soit $X$ un ensemble. Pour toute partie $\Sigma$ de $\mathscr{P}(X)$, il existe une unique topologie (la plus petite pour l'inclusion) contenant $\Sigma$. C'est l'ensemble $\mathscr{O}$ des unions d'intersections finies d'éléments de $\Sigma$. C'est l'intersection de toutes les topologies contenant $\Sigma$. On dit que $\mathscr{O}$ est la **topologie engendrée** par $\Sigma$, et que $\Sigma$ est une **prébase** de $\mathscr{O}$.
Une **base d'ouverts** d'un espace topologique $(X, \mathscr{O})$ est une partie $\mathscr{B}$ de $\mathscr{O}$ telle que tout ouvert de $X$ est union d'éléments de $\mathscr{B}$. Par exemple, l'ensemble des intersections finies d'éléments d'une prébase une base d'ouverts. Si $(X, d)$ est un espace métrique, alors $\{B(x, \frac{1}{n+1}) : x \in X, n \in \mathbb{N}\}$ est une base d'ouverts.

#### 3.2.2.0.3.2 Voisinage(s)

**Définition 3.2.10** ([Pau09]). Soit $X$ un espace topologique. Un **voisinage** d'une partie $A$ de $X$ est une partie de $X$ contenant un ouvert contenant $A$. On appelle **voisinage** d'un point $x$ de $X$ un voisinage de $\{x\}$.

**Proposition 3.2.11** ([Pau09]). Une partie $A$ de $X$ est ouverte si et seulement si elle est voisinage de chacun de ses points, car elle est alors égale à la réunion des ouverts qu'elle contient.
Si $\mathscr{V}(x)$ est l'ensemble des voisinages de $x$, alors :

- toute partie de $X$ contenant un élément de $\mathscr{V}(x)$ appartient à $\mathscr{V}(x)$ ; et,
- toute intersection finie d'éléments de $\mathscr{V}(x)$ appartient à $\mathscr{V}(x)$.

**Proposition 3.2.12** ([Pau09]). Si $f : X \to Y$ est un homéomorphisme et $x \in X$, alors $f(\mathscr{V}(x)) = \mathscr{V}(f(x))$.

#### 3.2.2.0.3.3 Intérieur, adhérence, frontière, densité

**Définition 3.2.13** ([Pau09]). Soit $X$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$. L'**intérieur** de $A$ est l'ensemble, noté $\mathring{A}$, des points de $A$ dont $A$ est un voisinage.

**Définition 3.2.14** ([Pau09]). Soit $X$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$. L'**adhérence** de $A$ est l'ensemble, noté $\overline{A}$, des points de $X$ dont tout voisinage rencontre $A$.

**Définition 3.2.15** ([Pau09]). Soit $X$ un espace topologique et $A$ une partie de $X$. La **frontière** de $A$ est l'ensemble, noté $\partial A$, des points de $X$ adhérents à $A$ et à son complémentaire.

**Définition 3.2.16** ([Pau09]). Une partie de $X$ est **dense** dans $X$ si son adhérence est $X$, et **nulle part dense** si l'intérieur de son adhérence est vide.

#### 3.2.2.0.3.4 Séparation

**Définition 3.2.17.** Un espace topologique est **séparé** si deux points distincts de $X$ admettent des voisinages disjoints.

##### 3.2.2.0.4 Compacité

**Définition 3.2.18** ([Pau09])**.** Si $X$ est un ensemble, une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $X$ est un **recouvrement** de $X$ (ou *recouvre* X) si $\bigcup_{i\in I} A_i = X$. Un **sous-recouvrement** est une sous famille $(A_j)_{j\in J}$ (avec $J \subset I$) qui recouvre encore $X$. Si $X$ est un espace topologique, un recouvrement $(A_i)_{i\in I}$ est dit **ouvert** ou **fermé** si les $A_i$ le sont.

**Définition 3.2.19** ([Pau09])**.** Un espace topologique $X$ est dit **compact** s'il est *séparé* et si tout recouvrement ouvert de $X$ admet un sous-recouvrement fini.

**Théorème 3.2.20** ([Pau09], Tychonov)**.** Tout produit d'espaces compacts est compact.

##### 3.2.2.0.5 Connexité, connexité par arc

**Définition 3.2.21** ([Pau09])**.** Un espace topologique $X$ est dit**connexe** si l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

- les seules parties ouvertes et fermées de $X$ sont $\varnothing$ et $X$ ;
- il n'existe pas de partition de $X$ en deux ouverts non vides ;
- il n'existe pas de partition de $X$ en deux fermés non vides ;
- toute application continue de $X$ à valeur dans un espace discret est constante ; ou,
- toute application continue de $X$ à valeurs dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

**Définition 3.2.22** ([Pau09])**.** Un espace topologique $X$ est **connexe par arcs** si pour tous $x, y$ dans $X$, il existe une application continue $f : [0, 1] \to X$ telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

## 3.2.3 Groupe

On utilise [Biq11] et [Mil21]. On écrit aucune démonstration, on aura tout le plaisir de le faire plus tard. C'est franchement plus un "fascicule de résultats" qu'autre chose.

##### 3.2.3.0.1 Définition – groupe

**Définition 3.2.23** ([Biq11])**.** Un **groupe** $G$ est la donnée d'un ensemble $G$, muni d'une loi de composition :

$$G \times G \to G, (g, h) \mapsto gh \tag{3.3}$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

- **associativité** : pour tous $g_1, g_2, g_3$ dans $G$, on a : $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ ;
- **existence d'un (unique) élément neutre** : il existe un élément $e$ dans $G$ tel que pour tout élément $g$ de $G$ : $eg = ge = g$ ; et,

- **existence d'un (unique) inverse** : il existe un élément $g^{-1}$ dans $G$ tel que $gg^{-1} = g^{-1}g = e$, où $e$ est l'élément neutre.

**Remarque.** Il existe un foncteur (d'oubli) de la catégorie **Grp** dans **Ens** (consistant à oublier la structure de groupe de $G$ et ne "*retourner*" que l'ensemble en question sur lequel *avait été* construit le groupe).

Tout résumé en un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & G \arrow[dd, bend left] \arrow[dd, phantom, "{(g_1,(g_2,g_3)) = ((g_1,g_2),g_3)}"] \\
G \times G \arrow[r, "{(g,h)}"] & G \arrow[loop above, "e"] \arrow[loop below, "g^{-1}"] \arrow[ur, "{(\cdot,g_2)}", "{(g_1,\cdot)}"'] \arrow[dr, "{(g_2,\cdot)}", "{(\cdot,g_3)}"'] & \\
 & & G \arrow[uu, bend left]
\end{tikzcd}$$

Le diagramme n'est pas vraiment conventionnel et pas forcément très rigoureux mais j'ose espérer que l'on comprend plus ou moins comment il marche.

Formellement, un groupe est alors noté $(G, +)$, $(G, \times)$, $(G, \otimes)$... (en fonction se sa loi de composition (interne)). Par abus de langage, on pourra simplement désigner le groupe par $G$ ; et, quand cela ne pose aucun problème ni aucune ambiguïté, ne pas noter explicitement la loi de composition interne (par exemple $x \otimes y$ pourrait être écrit $xy$).

**Définition 3.2.24** ([Mil21]). L'**ordre d'un groupe** $G$ est son cardinal. On le note $|G|$.

**Remarque.** Ne pas confondre ordre d'un groupe avec l'ordre d'un élément d'un groupe (c'est-à-dire le plus petit entier $m > 0$ tel que, pour un élément $a$ du groupe, on ait $a^m = e$ ; on dira que l'ordre de $a$ est fini si $m$ l'est).

Un groupe fini dont l'ordre est une puissance d'un nombre premier $p$ sera appelé $p$-groupe.

#### 3.2.3.0.2 Définition – morphisme(s) de groupe

**Définition 3.2.25** ([Biq11]). Un **morphisme de groupe** (ou *homomorphisme de groupe*) est la donnée d'une application $f : G_1 \to G_2$ entre deux groupes, satisfaisant :

$$f(gh) = f(g)f(h) \tag{3.4}$$

pour tous $g$ et $h$ issus de $G_1$.

**Définition 3.2.26** ([Biq11], [Mil21]). Si, de plus le morphisme $f$ de la définition 3.2.25 est bijectif (c'est-à-dire injectif et surjectif), alors, on dit que $f$ est un **isomorphisme**. Si, de plus, $G_1 = G_2$, alors $f$ est un **automorphisme**.
Dans le cas où l'on aurait bien $G_1 = G_2$ sans avoir $f$ bijectif, on parlera simplement d'**endomorphisme**.

**Remarque.** Par construction, le morphisme inverse $f^{-1}$ existe et est également un morphisme de groupe bijectif (c'est-à-dire un isomorphisme).

On dira alors que :

**Définition 3.2.27.** Deux groupes $(G_1, \cdot_1)$, $(G_2, \cdot_2)$ sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme entre ces deux groupes.

**Exemple.** Intéressons nous aux applications $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+\backslash\{0\}$ et $\ln : \mathbb{R}^+\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. On connaît (ou plutôt verra dans le chapitre suivant) les relations fonctionnelles suivantes :

$$\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b) \tag{3.5}$$

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \tag{3.6}$$

Le but du jeu est de montrer que $(\mathbb{R}, +)$ est isomorphe à $(\mathbb{R}^+\backslash\{0\}, \cdot)$. Comment faire? On a tous les éléments pour construire un isomorphisme entre ces deux groupes.

**Définition 3.2.28** ([Biq11])**.** Soit $g \in G$, alors l'application :

$$\iota_g : G \to G, x \mapsto gxg^{-1} \tag{3.7}$$

est un automorphisme de $G$. Un tel automorphisme de $G$ est appelé **automorphisme intérieur** de $G$.

**Remarque.** Un automorphisme qui ne serait pas intérieur est dit extérieur ([Mil21]).

#### 3.2.3.0.3 Définition – sous-groupes

**Définition 3.2.29** ([Mil21], [Biq11])**.** Un sous-ensemble $S$ non vide de l'ensemble sur lequel est défini $G$ est un **sous-groupe** de $G$ si :

- l'élément neutre de $G$ appartient à $S$ ;
- pour tous $a$ et $b$ dans $S$, on a $ab$ également appartenant à $S$ ; et,
- pour tout $a$ dans $S$, l'inverse de $a$ appartient également à $S$.

**Remarque.** Les sous-groupes de $\mathbb{Z}$ sont les $n\mathbb{Z}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Les sous-groupes (non denses) de $\mathbb{R}$ sont les $a\mathbb{Z}$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Si $f : G \to G'$ est un morphisme de groupe, alors le **noyau** (ker) et l'image de $f$ (im) sont des sous-groupes de $G$ et $G'$ (respectivement). On rappelle que :

$$\ker f = \left\{ g \in g | f(g) = e \right\} \tag{3.8}$$

$$\operatorname{im} f = \left\{ f(g), g \in G \right\} \tag{3.9}$$

**Proposition 3.2.30.** Une intersection de sous-groupes de $G$ est un sous-groupe de $G$.

**Définition 3.2.31.** Le **centre** d'un groupe $G$ est le sous-groupe suivant :

$$\mathcal{Z}(G) := \Big\{g \in G | gx = xg \text{ pour tout } x \in G\Big\}. \tag{3.10}$$

**Remarque.** Le groupe $G$ est abélien (c'est-à-dire commutatif) si et seulement si $\mathcal{Z}(G) = G$.

**Définition 3.2.32** ([Biq11]). On dit qu'un sous-groupe $H$ de $G$ est **distingué**, ce que l'on note $H \lhd G$, s'il est stable par tout automorphisme intérieur (c'est-à-dire si l'on a $ghg^{-1} \in H$ pour tous $g \in G$ et $h \in H$).

**Exemple.** Les sous-groupes triviaux $\{e\}$ et $G$ de $G$ sont distingués.
Dans un groupe abélien, tous les sous-groupes sont distingués. (La réciproque est fausse, par exemple : le groupe $Q_8$ (cf l'exemple 3.2.3.0.7) est non commutatif mais tous ses sous groupes sont distingués.)

**Définition 3.2.33** ([Mil21]). L'ensemble des éléments d'ordre fini d'un groupe $G$ forme un sous-groupe de $G$ : le **sous-groupe de torsion** $G_{\text{tors}}$.
On dira que le groupe $G$ est de **torsion** si tous ses éléments sont d'ordre fini.

#### 3.2.3.0.4 Propriétés – groupes

**Définition 3.2.34.** Un groupe $G$ est dit **abélien** si chacun de ses éléments commutent avec tous les autres.

**Définition 3.2.35** ([Mil21]). Un groupe $G$ est dit **simple** s'il n'a que $\{e\}$ et $G$ comme sous-groupes distingués.

**3.2.3.0.5 Quotient** La motivation de [Biq11] (ou du moins l'une des motivations) est ce théorème :

**Théorème 3.2.36** ([Biq11]). Si $H$ est un sous-groupe distingué de $G$, alors il existe sur $G/H$ une unique structure de groupe, telle que la projection $p : G \to G/H$ soit un morphisme de groupe.

**Remarque.** Si le sous-groupe $H$ est distingué, alors les classes à droites correspondent et sont égales aux classes à gauches. Ainsi $G/H = H/G$ et on obtient le même groupe quotient en considérant ou les classes à droite ou les classes à gauche. [a]

*a.* On ne fait pas tous les développements sur les classes à droite / gauche. On verra plus tard. Je commence à piger ces histoires de quotient.

**Théorème 3.2.37** ([Biq11], **Propriété universelle du quotient**). Soit $H$ un sous-groupe distingué de $G$, et $f : G \to G'$ un morphisme de groupes. Si $H \subset \ker f$, alors il existe un unique morphisme $\hat{f} : G/H \to G'$ tel que $f = \hat{f} \circ p$, c'est-à-dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & G' \\
G/H \arrow[ur, dashed, "\hat{f}"] &
\end{tikzcd}
$$

En outre, $\ker \hat{f} = \ker f/H$ et $\mathrm{im}\, \hat{f} = \mathrm{im}\, f$.

**3.2.3.0.6 Les Sylow** Bon bah merde, c'est l'heure des Sylow!

> *As an undergraduate, I learned the Sylow theorems in my algebra classes but could never retain either the statement or proof of these theorems in memory except for short periods of time (and in particular, for the duration of an algebra exam). I think the problem was that I was exposed to these theorems long before I had internalised the concept of a group action. But once one has the mindset to approach a mathematical object $X$ through the various natural group actions on that object, and then look at the various dynamical features of that action (orbits, stabilisers, quotients, etc.) then all the Sylow theorems (and Cauchy's theorem, Lagrange's theorem, etc.) all boil down to observing some natural action on some natural space (e.g. the conjugacy action on the group, or on tuples of elements on that group) and counting orbits and stabilisers (p-adically, in the case of the Sylow theorems). (Isaacs book on finite group theory emphasises this perspective very nicely, by the way.)*
>
> – Terry Tao [Tao13].

**Définition 3.2.38** ([Biq11]). Si $G$ est un groupe fini et $p$ un facteur premier de $|G|$ (ainsi : $|G| = p^\alpha m$, avec $p \nmid m$). Un **$p$-sous-groupe de Sylow** de $G$ est un sous-groupe d'ordre $p^\alpha$ de $G$.

**Remarque.** On pourra abréger $p$-sous-groupe de Sylow en $p$-Sylow.

**Proposition 3.2.39.** Sous les hypothèses de la définition 3.2.38, on a les énoncés suivants :

- $G$ contient un $p$-Sylow ;
- tout $p$-sous-groupe de $G$ est contenu dans un $p$-Sylow ;
- tous les $p$-Sylow sont conjugués dans $G$ ; et,
- le nombre de $p$-Sylow divise $m$, et, est congru à $1$ modulo $p$.

En fin de compte, ça ne semble pas faire si peur que ça... ces fameux Sylow!

**3.2.3.0.7 Exemples de groupe**

**Exemple** ([Mil21]). Un groupe $G$ est dit **cyclique** s'il est *généré* par un seul élément (c'est-à-dire si $G = \langle r \rangle$ pour un certain $r \in G$). Si l'ordre de $r$ est fini et vaut $n$, alors :

$$G = \{e, r, r^2, \dots, r^{n-1}\} \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \tag{3.11}$$

si l'ordre de $r$ est infini, alors :

$$G = \{\dots, r^{-i}, \dots, r^{-1}, e, r, \dots, r^i, \dots\} \cong \mathbb{Z} \tag{3.12}$$

**Exemple** ([Mil21]). Le **groupe diédral** $D_n$ est le groupe des symétries d'un polygones réguliers de $n$ côtés.

**Exemple** ([Biq11]). Le **groupe symétrique** $\mathcal{S}_n$ des bijections d'un ensemble à $n$ éléments est un groupe d'ordre $n!$.

**Exemple** ([Biq11]). Si $\mathbb{K}$ est un corps, alors les matrices inversibles $(n, n)$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ forment le **groupe général linéaire** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$ est un morphisme. Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$, alors le groupe des applications linéaires bijectives de $E$ dans $E$ est isomorphe à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Plus généralement, si $A$ est un anneau commutatif, alors on peut former le groupe $\mathrm{GL}_n(A)$ des matrices inversibles à coefficients dans $A$ : il s'agit exactement des matrices $M$ telles que $\det(M) \in A^\times$ (e.g. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est constitué des matrices à coefficients entiers de déterminant $\pm 1$).

**Exemple** ([Mil21], aucune référence à la théorie de Galois). Le groupe $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$ est composé des automorphismes de $G$.
Par exemple, $\mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p^n) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$. Ou encore : $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

**Exemple** ([Mil21]). Le **groupe des quaternions** $Q_8$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.
Si l'on définit $a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, alors on a les relations suivantes :

$$a^4 = e, a^2 = b^2, bab^{-1} = a^3. \tag{3.13}$$

Le groupe des quaternions $Q_8$ est alors généré par les deux éléments $a$ et $b$ et est égal à :

$$Q_8 = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\} \tag{3.14}$$

.

#### 3.2.3.0.8 Classifications des "petits" groupes

| $\mathrm{card}(G)$ | nombre de $\mathcal{Z}(G) = G$ | nombre de $\mathcal{Z}(G) \subsetneq G$ | $G$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 1 | 0 | $\mathbb{F}_2$ |
| 3 | 1 | 0 | $\mathbb{F}_3$ |
| 4 | 2 | 0 | $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ |
| 5 | 1 | 0 | $\mathbb{F}_5$ |
| 6 | 1 | 1 | $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $\mathfrak{S}_3$ |
| 7 | 1 | 0 | $\mathbb{F}_7$ |
| 8 | 3 | 2 | $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$<br>$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $D_4$, $Q_8$ |
| 9 | 2 | 0 | $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ |
| 10 | 1 | 1 | $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, $D_5$ |

Plus généralement, et là ça devient vraiment compliqué : on peut classifier les groupes simples finis (à isomorphisme près) :

— les groupes cycliques d'ordre $p$ un nombre premier;

— les groupe alterné de degré au moins égal à 5 ;

— les groupes de type de Lie ;

— l'un des 26 groupes sporadiques ; et,

— le groupe de Tits (le 27ème groupe sporadique).

Voir tous les articles de Gorenstein par exemple (plus généralement, il y a une abondante littérature ; cf. notamment [Gil12a] et [Gil12b]). Il y a aujourd'hui tout un travail sur la preuve d'un aussi gros résultat (trois preuves : une de première, seconde et même troisième génération consistant, apparemment, en une simplification et meilleure compréhension du bins). Je me demande quelle sera la prochaine étape (apparemment une histoire avec les $p$-groupes (?)).

Autrement, j'ai fait un petit programme pour jouer avec les groupes (en se basant sur leur table de Cayley, ce qui est pas franchement le mieux mais c'est une représentation simple et plus ou moins commode). Je ne mets le *init*, le reste viendra plus tard lorsque ce sera utile (vérifier aussi que je n'ai pas fait absolument n'importe quoi et voir s'il n'y aurait pas moyen de faire un petit peu plus "optimisé").

```
class Grp:

        def __init__(self, cayley_table):
        self.order = len(cayley_table)

        # Vérifier la dimension de la table de Cayley
        assert (all(isinstance(x, list) and len(x) == self.order for
            x in cayley_table))

                # Vérifier la stabilité.
                assert(all(cayley_table[i][j] in cayley_table[0] for
                    j in range(self.order) for i in range(self.order))
                    )

                # Vérifier l'associativité
                assert(all(cayley_table[i][cayley_table[j][k]] ==
                    cayley_table[cayley_table[i][j]][k] for k in range
                    (self.order)
                        for j in range(self.order) for i in range(
                            self.order)))

                # Vérifier l'existence d'un élément neutre.
                assert(all(cayley_table[0][0] in sub_list for
                    sub_list in cayley_table))

                # Vérifier l'existence d'un inverse.
```

```
        assert(all(sub_list.count(cayley_table[0][0]) >= 1
            for sub_list in cayley_table))

        # Exemple de Table de Cayley générale :
        #
        #    |  e    a    b    c    ...  n
        # ---|---------------------------------
        #e   |  e    a    b    c    ...  n
        #a   |  a    ...  ...  ...  ...  ...
        #b   |  b    ...  ...  ...  ...  ...
        #c   |  c    ...  ...  ...  ...  ...
        #... |  ...  ...  ...  ...  ...  ...
        #n   |  n    ...  ...  ...  ...  ...
        self.table = cayley_table

        # Obtenir la liste de tous les éléments du groupe
        self.elements_list = self.table[0]
```

Et pour déclarer des instances de **Grp**, on peut faire cela par exemple :

```
from Grp import *

CAYLEY_TAB_ZERO = [[0]]

CAYLEY_TAB_Z2Z = [[0, 1],
                  [1, 0]]

CAYLEY_TAB_Z3Z = [[0, 1, 2],
                  [1, 2, 0],
                  [2, 0, 1]]

CAYLEY_TAB_Z4Z = [[0, 1, 2, 3],
                  [1, 2, 3, 0],
                  [2, 3, 0, 1],
                  [3, 0, 1, 2]]

CAYLEY_TAB_KleinK4 = [[0, 1, 2, 3],
                      [1, 0, 3, 2],
                      [2, 3, 0, 1],
                      [3, 2, 1, 0]]

zero = Grp(CAYLEY_TAB_ZERO)
g2 = Grp(CAYLEY_TAB_Z2Z)
g3 = Grp(CAYLEY_TAB_Z3Z)
```

```
g = Grp(CAYLEY_TAB_Z4Z)
```

### 3.2.4 Anneau, Corps

### 3.2.5 Espace vectoriel

#### 3.2.5.1 Espace vectoriel normé

#### 3.2.5.2 Espace de Banach

#### 3.2.5.3 Espace de Hilbert

#### 3.2.5.4 Espace affine, espace projectif

### 3.2.6 Espace de probabilité

On ne va pas parler d'univers mais d'un concept bien précis : la notion d'espace de probabilité (a priori introduite par Kolmogorov?).

De manière générale, on va procéder ainsi : on définit une tribu (également appelée $\sigma$-algèbre), une mesure (afin d'en tirer la notion de probabilité) et on termine par considérer le tout ensemble afin d'avoir un espace mesuré (ou plus précisément, comme on le veut, un **espace probabilisé**).

**Définition 3.2.40 (Tribu / $\sigma$-algèbre).** Soient $E$ un ensemble, $T$ une famille de parties de $E$ (i.e. $T \subset \mathcal{P}(E)$). La famille $T$ est une **tribu** (on dit aussi $\sigma$-**algèbre**) sur $E$ si $T$ vérifie :

- $\varnothing \in T$, $E \subset T$ ;
- $T$ est stable par union dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T$, on a $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ ;
- $T$ est stable par intersection dénombrable, c'est-à-dire que pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T$, on a $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in T$ ; et,
- $T$ est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire que pour tout $A \in T$, on a $A^c \in T$.

**Définition 3.2.41.** Soit $(E,T)$ un espace mesurable. On appelle **mesure** une application $m : T \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ vérifiant :

- $m(\varnothing) = 0$ ; et,
- $m$ est $\sigma$-additive, c'est-à-dire que pour toute famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $T$ disjoints deux à deux (i.e. tels que $A_n \cap A_m = \varnothing$, si $n \neq m$), on a :

$$m\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \tag{3.15}$$

**Définition 3.2.42.** Soit $(E, T)$ un espace mesurable.

1. On appelle **mesure finie** une mesure $m$ sur $T$ telle que $m(E) < +\infty$.
2. On appelle **probabilité** une mesure $p$ sur $T$ telle que $p(E) = 1$.

**Définition 3.2.43.** Soient $(E, T)$ un espace mesurable, et $m$ une mesure (resp. une probabilité) sur $T$. Le triplet $(E, T, m)$ est appelé **espace mesuré** (resp. **espace probabilisé**).

Vu sous cet angle là, la théorie des probabilités (version "nouvelle génération") a l'air franchement intéressante. On n'en dit pas plus pour l'instant mais c'est avec intérêt que l'on y reviendra.

## 3.3 Éléments caractéristiques d'espaces

### 3.3.1 Base et dimension

### 3.3.2 Volume et mesure ?

### 3.3.3 Symétries ?

### 3.3.4 Trous ?

# Chapitre 4

# Actions sur l'espace

*Comme je vous le dis souvent, il faut rester humble ! Vous ne savez pas faire grand chose.*

C'est en ces termes que la professeure de Terminale S nous rappelait que nous étions des glandus et très limités pour calculer des intégrales. Mais sans conteste, ses paroles s'appliquent et se vérifient plus globalement. En sortant de terminale, on ne sait franchement rien. Tout au mieux, on est capable de bien peu (tout du moins si l'on ne se prend pas en main).

Mon cours de Terminale se ramène à 49 pages tapées à l'ordinateur. Il me semble qu'il manque deux ou trois choses (covid oblige...). En plus de ça, globalement le niveau était celui officiellement exigible (c'est-à-dire officieusement pas franchement relevé et approfondi). Quand je vois que dans certaines terminales parisiennes ils ont traité la réduction des endomorphismes gné. Je vais donc muscler le jeu et, en plus de lire entre les lignes du programmes en comblant les trous, je vais me sentir obligé d'approfondir et d'inclure des trucs pas exigibles d'un "terminale classique".

Afin de constituer et de mener à bien cette partie je vais m'appuyer sur diverses sources : les sources officielles bien évidemment (c'est-à-dire le programme officiel ; juste pour avoir une idée globale de l'armature, de la structure de cette partie). Ensuite, bien entendu, le cours de ma professeure de Terminale ainsi qu'une flopée de cours en ligne [IV14], [Bon09], [Pé08] et des documents complémentaires ("spécialisés") dont je parlerai en temps voulu (par exemple, dans [Bou97], il est question des ouvrages d'un certain William Feller, nous verrons en temps voulu ce dont il s'agit).

# 4.1 Objets géométriques et "algébriques"

Putain, va falloir faire des figures! Armons nous de nos meilleurs *tikz*, *graphics* et cie et essayons de faire des trucs pas trop dégueus.

## 4.1.1 Géométrie (élémentaire) dans l'espace

Malheureusement, on n'a pas fait grand chose au lycée. Ce pourrait être expédier extrêmement rapidement... mais non, je vais essayer de combler quelques trous dans la mesure de mes capacités (franchement mauvaises) en géométrie.

## 4.1.2 Trigonométrie

J'avoue que les cours de trigonométrie me sont carrément passés au-dessus de la tête, il va vraiment falloir être rigoureux et tout reprendre d'absolument zéro. Pour ce faire, bien que n'ayant plus accès à mes cours de premières (qui se résumaient aux définitions, principales propriétés et interprétations), je vais aller piocher dans trois ouvrages : [Hob19], [AF04] et tant qu'à faire [IV14] (pour coller, de près ou de loin, aux programmes des "lycées").

On semble ne nous demander pas franchement plus que ce dont j'ai parlé juste au-dessus (principales propriétés, interprétation graphique, faire joujou avec le cercle trigonométrique, voir l'identité d'Euler et quelques autres relations, savoir ce que c'est que "linéariser" [1]).

### 4.1.2.1 De la géométrie dans le triangle !

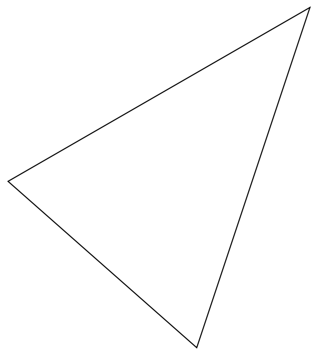
Toute question, de nature géométrique, se rapportant à un triangle est-elle résoluble? Ou, de manière plus intéressante, quels jeux d'opérations et de données (*nécessaires*[2] pour résoudre un problème donné) *suffisent* telles pour la détermination d'une quelconque propriété d'un triangle?

Parfois, au regard de l'habilité nécessaire pour résoudre un problème (d'olympiades internationales par exemple), on comprend qu'il y a tout un art de la réflexion (... des *raisonnements divins*...) Des questions pour lesquelles les réponses paraissent, en l'apparence, si intuitives se retrouvent être des bourbiers pour toute personne non expérimentée. Au regard des l'histoire des Mathématiques, si je ne m'abuse, c'est de ce genre de substance, de considérations que sont nés des problèmes de plus en plus complexes : le raisonnement géométrique semble avoir été un premier pas fondamental dans le lent développement des Mathématiques modernes. Pour beaucoup, la géométrie semble aujourd'hui désuète, cantonnée à une simple "science de l'application" dans laquelle on vient

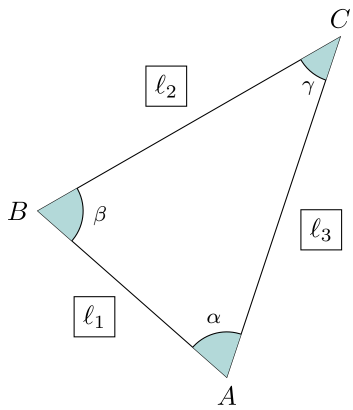
1. C'est quand même drôle de voir cela et de constater que ce n'est aucunement intégré dans des modules de géométrie du triangle ou alors que je vois mal l'utilisation que l'on pouvait en faire (à part l'utiliser *à la physicienne*).
2. En admettant que l'on sache déterminer le jeu d'opération *nécessaire*...

se servir au gré de nos besoins. La réalité est sans doute quelque peu différente : comme on l'a entraperçu, le paysage Mathématique s'est grandement ouvert à tout type d'influences et ce qui était alors la Reine mère est venue sous-tendre [3] la pensée plutôt que la matérialiser [4].

Commençons tout d'abord par observer un menu triangle bien dénudé :



En premier lieu, que peut-on faire ? Commençons par nommer les choses : chaque sommet va posséder un *nom* ($A$, $B$ ou $C$) ainsi que chaque angle ($\alpha$, $\beta$, $\gamma$). De même, on peut associer une longueur à la distance entre chaque sommet ($\ell_1$, $\ell_2$ et $\ell_3$).




De manière générale, on peut être tenté de se poser les questions suivantes :

1. existe-t-il une relation entre l'aire ou le périmètre [5] dudit triangle et les angles et longueurs associées aux distances entre chaque sommet ?
2. peut-on construire des *grandeurs* intéressantes en combinant (d'une manière ou d'une autre) angles, longueur... ?
3. quels théorèmes intéressants existent-t-ils ?

   ...

3. La géométrie apparaît partout (géométrie algébrique, "géométrie" d'une variété...). Elle a disséminé sa sève dans tout l'édifice Mathématique.

4. Au sujet de ce problème de matérialisation, un moyen de s'en apercevoir réside sans doute dans l'explosion de l'étude des espaces de grandes dimensions (où l'intuition géométrique est *relativement vaine*). Une manière plus "prosaïque" de penser à ce problème de matérialisation réside sans doute dans le fait que tout ne soit que représentation et que, "physiquement", la ligne n'existe pas, nous n'en n'aurions qu'une intuition géométrique (au sens abstrait du terme).

5. Pour le périmètre, c'est absolument évident : le périmètre est égal à $\ell_1 + \ell_2 + \ell_3$. En ce qui concerne l'aire, c'est déjà un peu moins évident mais ça se fait ! Il faut aller voir du côté de la formule de Héron, par exemple.

On peut notamment répondre à la deuxième question en introduisant tout l'attirail des fonctions trigonométriques (encore que... pour nous ce ne sont pas encore des *fonctions* au sens habituel du terme, ce sont, disons le, de simples relations qui se révèleront plus riches qu'elles ne le semblent par la suite).

**Définition 4.1.1** ([AF04]). On définit le **sinus**, le **cosinus** et la **tangente d'un angle du triangle rectangle en** $C$ comme suit :

$$\sin(\alpha) = \frac{\ell_2}{\ell_1}, \cos(\alpha) = \frac{\ell_3}{\ell_1}, \tan(\alpha) = \frac{\ell_2}{\ell_1} \tag{4.1}$$

$$\sin(\beta) = \frac{\ell_3}{\ell_1}, \cos(\beta) = \frac{\ell_2}{\ell_1}, \tan(\beta) = \frac{\ell_3}{\ell_2} \tag{4.2}$$

On se rend alors, par exemple, aisément compte que le rapport du sinus d'un angle sur son cosinus est égal à sa tangente. De la même manière, on trouve la fameuse identité suivante (pour un angle $x$ quelconque (mais compris entre $0$ et $90$ degrés [6])) :

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \tag{4.3}$$

**Démonstration.** On injecte les valeurs issues de la définition 4.1.1 : dans un cas, on obtient :

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} + \frac{\ell_3^2}{\ell_1^2} = \frac{\ell_2^2 + \ell_3^2}{\ell_1^2} \tag{4.4}$$

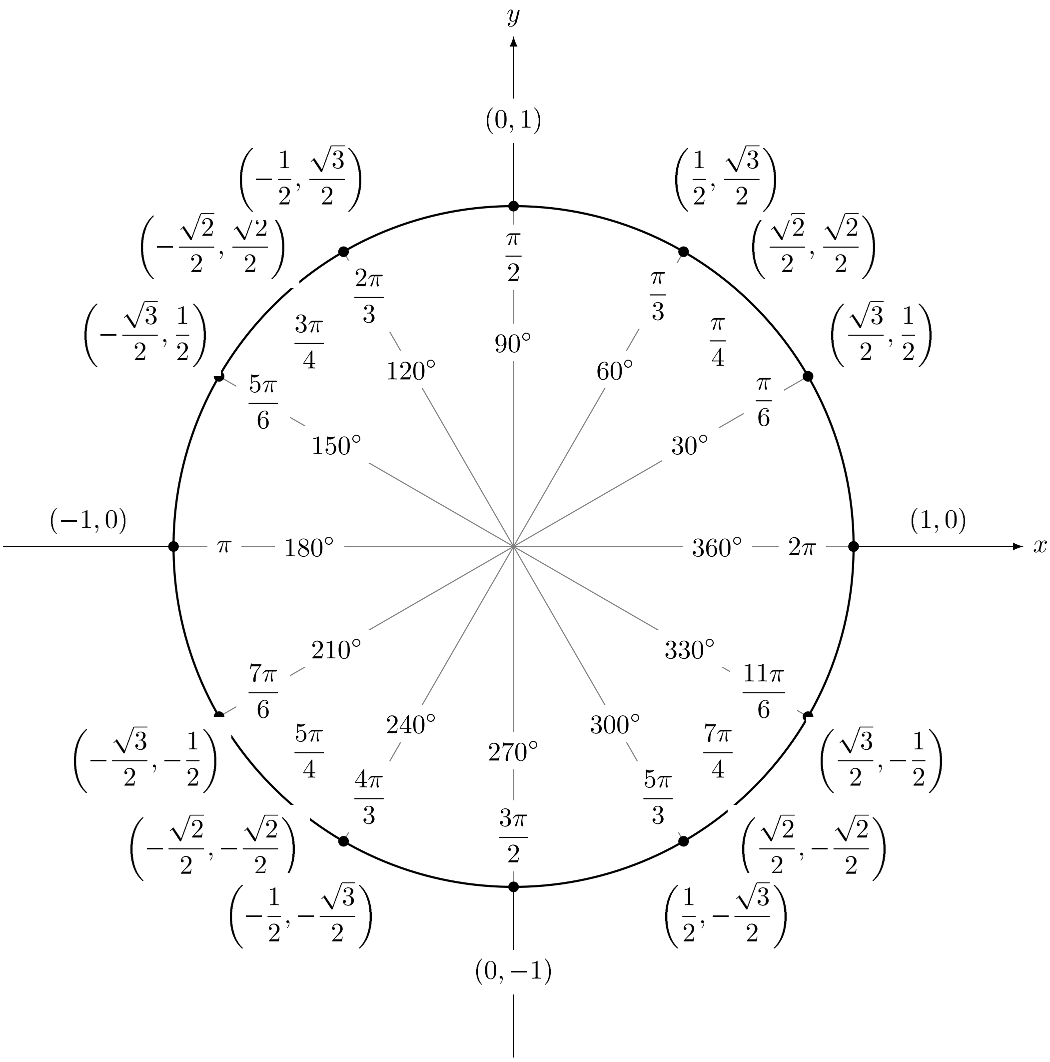
dans l'autre cas, on obtient :

$$\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = \frac{\ell_3^2}{\ell_1^2} + \frac{\ell_2^2}{\ell_1^2} = \frac{\ell_3^2 + \ell_2^2}{\ell_1^2}. \tag{4.5}$$

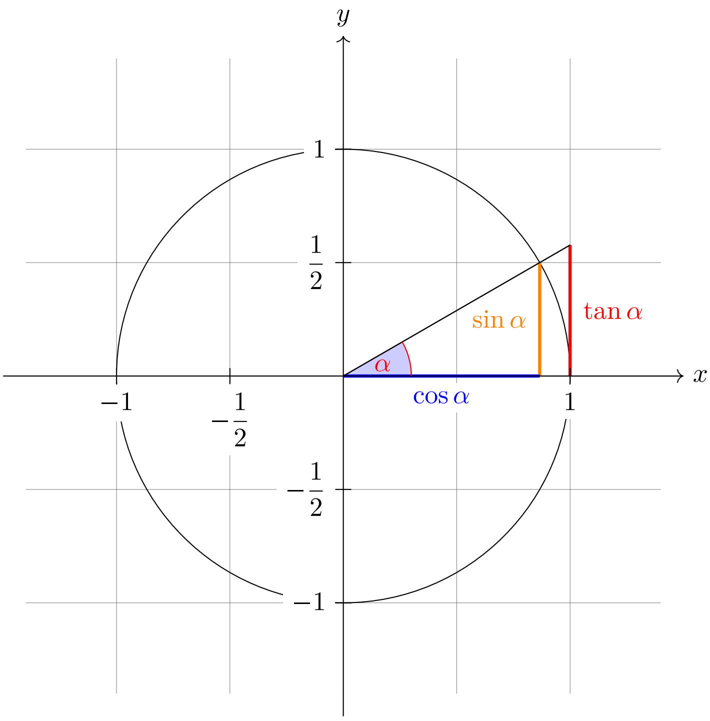
Or, la somme est commutative, et en appliquant le théorème de Pythagore (rappelons que l'on se situe dans le cas d'un triangle **rectangle**), on en déduit l'identité espérée. (Dans le cas de l'angle gamma, une simple manipulation algébrique accompagnée de son théorème de Pythagore permet de conclure.) □

6. Implicitement (ou plus ou moins explicitement), on s'est mis dans le cadre d'un triangle rectangle ! Néanmoins, tous les énoncés de cette section ne se cantonneront pas au cas du triangle rectangle !

#### 4.1.2.2 Immixtion du cercle trigonométrique




#### 4.1.2.3 Principales propriétés et relations trigonométriques



#### 4.1.2.4 Manipulations de polynômes trigonométriques et linéarisation

#### 4.1.2.5 Développements analytiques

#### 4.1.2.6 De la trigonométrie au-delà du triangle

### 4.1.3 Polynômes

C'est à dire qu'au lycée, on ne voit pas grand chose sur les polynômes... Ça culmine avec l'introduction du corps des complexes, quelques liens algébriques et géométriques et surtout un travail de fond sur le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$, mais au-delà... boh... Peut-être que le plus compliqué qu'on ait vu était l'inégalité de Bernoulli $(1 + x)^n > 1 + nx$ ($n$ entier strictement supérieur à $1$ et $x$ réel supérieur ou égal à $-1$). Et à quoi ça nous a servi ? La démonstration d'un lemme, c'était donc un résultat de circonstance qui facilitait la vie plus qu'il l'orientait ou ne l'expliquait.

À vrai dire, on n'a jamais eu de "*théorie générale des équations polynomiales*" ou d'*étude approfondie des polynômes sur un corps* (ou autre). On a bouffé que du cas particulier pendant deux années. Tout ça pour quoi ? Pour retenir quelques maigres formules et dans les meilleurs cas avoir quelques visions éparses. Bref, aucune utilité. Fondamentalement, c'est très pauvre.

Les polynômes semblent être des objets extrêmement *naturels* et on ne fait que les entrevoir. J'avoue avoir une certaine déception en disant cela (d'autant plus que j'ai pu le (re)constater en faisant des batteries d'exercices).

### 4.1.4 Équations algébriques dans un repère orthonormé

### 4.1.5 Propriétés géométriques (longueur, orthogonalité)

### 4.1.6 Représentations géométriques (généralités : vecteurs, droites, plans)

### 4.1.7 Nombres complexes (et construction des nombres)

### 4.1.8 Représentation géométrique d'un nombre complexe

## 4.2 Objets analytiques

### 4.2.1 Suites

Intuitivement voire quasi-formellement, qu'est-ce qu'une **suite** (réelle) ?

#### 4.2.1.1 Premières approches

**Définition 4.2.1** (Cours Terminale)**.** On appelle **suite réelle** toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n). \end{aligned}$$

**Remarque.** On note alors par convention $u(n) := u_n$ (afin de marquer plus clairement la différence avec une fonction usuelle (cf. partie suivante) ; lorsque cela ne pose aucune ambiguïté, par commodité, facilité et surtout abus de langage, on pourra simplement parler de la suite $u$, ou pour être plus précis de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ (si la suite n'est définie qu'à partir d'un entier $n_0$)). Néanmoins, on fera spécialement attention à ne pas confondre la suite $(u_n)$ avec le réel $u_n$ qui correspond à l'évaluation de la suite $(u_n)$ en une valeur spécifique pour $n$ fixé.

Concernant des petits éléments de langage, on appelle *nième terme de la suite* le résultat de l'évaluation de la suite $(u_n)$ en une valeur spécifique (plus précisément, le nième terme de la suite est exactement $u_n$ ; sans les parenthèses évidemment).

Au-delà de ses éléments de style permettant de parler de notre fameuse *suite réelle*, deux questions s'imposent à nous : existerait-il donc des suites "au-delà" des réels ? (oui.) n'est-on pas embêté par le fait de définir une suite comme étant une certaine forme de "spécification", de cas particulier d'une fonction ? (si.) Plus généralement, c'est le problème de définition d'une suite qui s'impose (d'un côté un problème de définition strictement cantonné à l'utilisation que l'on voudra en faire (c'est-à-dire purement pratique), d'un autre, un problème de définition résidant dans le questionnement des fondamentaux nécessaire à la formalisation de la notion de suite).

Ces questions ont été clairement éludées dans la partie précédente (sur les *Objets géométriques et "algébriques"*, à peut-être l'exception polynôme / fonction polynomiale près). Il est temps de réfléchir clairement et de se poser la question de ce que l'on a utilisé et ce que l'on va utiliser au quotidien. Peut-être pourrait-on apporter une réponse (de forme plutôt que de fond) en disant qu'une suite ne serait qu'un tableau de nombre d'une seule ligne et d'une infinité de colonnes (dans l'esprit de la définition d'une matrice 4.5.3). Mais est-ce là vraiment intéressant ? De mémoire il me semble déjà avoir vu des gens procéder comme ça (dans un cours de L1 polycopié de l'UT3 je crois). En soi-même une telle définition n'apporte "aucune structure" : avoir un tableau de nombre et avoir une application / morphisme (nécessairement d'un ensemble dans un autre, potentiellement identiques) sont des histoires différentes aux possibilités bien éloignées. Il sera possible de tout de même bâtir des choses avec un "simple" tableau de nombre (il n'y a qu'à voir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ pour les matrices carrées inversibles). Le problème, si tant est que c'en soit réellement un (non), avec une définition par une matrice est que : de 1) on a pas défini les matrices (et encore moins les espaces vectoriels etc..., ok il y a eu quelques mots précédemment mais rien de folichon) et surtout 2) par elle-même, la définition n'apporte substantiellement rien (il reste tout à construire, la définition n'est pas prête à l'emploi (dans les deux cas à vrai dire, mais dans le cas du tableau de nombre plus que l'autre)).

On pourrait proposer quelques artifices qui contournent le problème, par exemple [Mil19a] : voir une suite comme une *succession de nombres réels ordonnés*. La notion d'ordre pourrait être "intéressante" à développer, mais, fondamentalement, ne revient-on pas substantiellement à exactement la même chose qu'avec la définition d'un tableau de nombre ? (oui et non.) Tao fait exactement cela dans [Tao20] (ou [O'S06]). Néanmoins, Tao a pris le temps de définir une notion "préliminaire" de suite en développant et réfléchissant sur l'arithmétique de Peano :

> *Suppose for each natural number $n$, we have some function $f_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ from the natural numbers to the natural numbers. Let $c$ be a natural number. Then we can* ***assign*** *a unique natural number $a_n$ to each natural number $n$, such that $a_0 = c$ and $a_{n++} = f_n(a_n)$ for each nautral number $n$.*

Malheureusement, sa construction ne répond pas exactement à ce que j'attends dans la mesure où la finalité est différente, on ne cherche pas à faire "réellement" les mêmes choses. *Bien définir les choses est une tâche ardue.* On comprend relativement aisément comment un tel objet est censé marcher (et encore... on n'a pas sous les yeux les subtilités piquantes qui pourraient survenir [7]), le définir *proprement* est une autre paire de manche. (On y reviendra sans doute jamais dans ce document, mais, je l'espère, plus tard, dans un autre document "plus propre".)

Sans doute, pour définir une suite, pourrait-on utiliser la notion de **famille** (qui aide et n'aide pas, à voir plus précisément) comme le fait Godement [God69] :

> On utilise fréquemment une notion voisine de celle de fonction, la notion de **famille** qu'on définit intuitivement comme suit : soit $I$ un ensemble ; alors, pour construire une **famille ayant $I$ pour ensemble d'indices** (ou une **famille indexée par $I$**), on se donne, pour chaque $i \in I$, un objet dépendant de $i$ (sans préciser d'avance dans quel ensemble on choisit les objets ainsi associés aux éléments de $I$ ; si l'on note $x_i$ l'objet associé à $i \in I$, on désigne généralement la famille considérée par la notion
>
> $$(x_i)_{i\in I}. \tag{4.6}$$
>
> Mathématiquement, une famille indexée par $I$ est un graphe $G$ possédant les deux propriétés suivantes : on a $\mathrm{pr}_1(G) = I$, et pour tout $i \in I$ il existe un seul $z \in G$ tel que $\mathrm{pr}_1(z) = i$ ; écrivant $z = (i, x_i)$ on retrouve la définition intuitive exposée ci-dessus.
>
> Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille ; on dit que c'est une **famille d'éléments d'un ensemble** $X$ si l'on a $x_i \in X$ pour tout $i \in I$ ; il existe toujours un tel ensemble $X$, par exemple $\mathrm{pr}_2(G)$ où $G$ est le graphe de la famille considérée. On dit de même qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ est une **famille de parties d'un ensemble** $X$ si l'on a $A_i \subset X$ pour tout $i\, inI$.
>
> Lorsque l'ensemble d'indices $I$ d'une famille est l'ensemble dont les éléments sont les entiers naturels $1, 2, 3, \dots$, on dit que cette famille est une **suite** ; on désigne souvent une suite par une notation telle que
>
> $$(x_n)_{n\geqslant 1} \tag{4.7}$$
>
> se donner une suite d'éléments d'un ensemble $X$ revient donc à choisir des éléments
>
> $$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \tag{4.8}$$
>
> de $X$, ou encore à se donner une application $n \mapsto x_n$ de l'ensemble des entiers naturels dans $X$.

En fin de compte on a avancé en prenant du recul pour se retrouver à peu près au même endroit qu'au début, gné.

Il reste néanmoins la première question : dans la définition ci-dessus, on parle de suite *réelle*. Est-ce à dire qu'il existe d'autres types de suite ?! Tout à fait !!! Il n'y a qu'à voir la définition de Godement ci-dessus : on peut se prendre un ensemble $X$ relativement

7. À quel moment, pouvons nous nous douter, à l'heure actuelle, que les suites vont servir pour pour diverses définitions et utilisations de la continuité, complétude, compacité... On comprend les idées associés, mais sans savoir comment ça se définit, comment penser que les suites sont un bon outil pour réfléchir dessus ? Et ça c'est sans parler d'énoncés pas vraiment intuitifs ou trompeurs quand on ne fait pas attention, cf. par exemple le post de Chaurien [Cha22].

quelconque : les réels, les complexes, des espaces de matrices, des suites de fonctions... Malheureusement, au lycée, c'est à peine si l'on voit plus d'un tiers du quart de ce qui peut être intéressant avec les suites réels (et on entraperçoit les suites complexes de temps en temps dans des exercices de géométrie ; on est bien loin de la dynamique holomorphe, pour laquelle, j'espère, on aura le plaisir de faire un petit développement dans les semaines et mois qui arrivent). Revenons à nos petites suites réelles ! Le modèle des suites étant calqué sur celui des fonctions, c'est ainsi tout naturellement et logiquement que les suites vont pouvoir être définies (*dans la pratique* par des moyens similaires) : on ne va s'intéresser qu'à deux (et laisser de côté des points comme définition par une équation fonctionnelle de côté) :

1. **formule explicite** : c'est clairement la plus simple, on a tout sous les bras et dans les mains. Le plus important est que l'on peut **calculer n'importe quel terme de la suite de manière *immédiate*** !

   > **Exemple.** On pose, pour tout entier naturel $n$, $u_n = (-1)^n$ et pour tout entier naturel $n$ non nul, $w_n = \frac{1}{n}$. On peut alors calculer immédiatement, par exemple, le sixième ou cent quarantième terme de chacune des suites. Par exemple : $u_{113} = (-1)^{113} = (-1)^{2 \cdot 56+1} = (-1)^1 = -1$ ou encore $w_{641} = \frac{1}{641}$.

   En résumé, disposer d'une formule explicite revient à disposer d'une relation, qui, pour chaque $u_n$ ne dépend que de $n$ (en tant que variable) et où n'apparaît aucune occurrence d'un $u_k$, avec $k$ différent de $n$.

2. **récurrence** (d'ordre un) : dans ce cas, on est un peu plus embêté pour calculer (directement) le nième terme d'une quelconque suite. Désormais, **le calcul d'un terme d'une quelconque suite définie par récurrence exige *a priori* de connaître les termes qui le précèdent** car on calcule "de proche en proche" les termes successifs. C'est-à-dire que, disons que l'on dispose d'une $i$-ième terme, grâce à la relation de récurrence, on va pouvoir déterminer le $i + 1$-ième terme en utilisant le résultat pour le $i$-ième terme. Ça rend évidemment le calcul du $n$-ième terme un peu plus fastidieux qu'en utilisant une formule explicite mais ça reste largement calculable (en utilisant un programme par exemple).

   > **Exemple.** On considère la suite $u$ définie par $u_0$ = -4 et pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_{n+1} = 3 + 2 \cdot u_n$. Ainsi : $u_0 = -4$, $u_1 = 3 + 2 \cdot u_0 = 3 + 2 \cdot (-4) = -5$, $u_2 = 3 + 2 \cdot u_1 = 3 + 2 \cdot (-5) = -7$...
   > Si l'on pousse les calculs suffisamment loin, on devrait pouvoir inférer et induire puis déduire la formule explicite qu'est censée revêtir $u$. Encore que : faudra la démontrer ensuite ! (par récurrence typiquement !)

   En résumé, disposer d'une suite définie par récurrence revient à disposer d'une relation, qui, pour chaque $u_n$, va dépendre de $n$ (en tant que variable) et où apparaît des occurrences de $u_k$ (typiquement $k = n - 1$), avec un $k$ différant de $n$ (une fois toutes les choses "réduites", histoire que l'on ait pas de faux positif à croire que l'on a une suite définie par récurrence alors qu'en fait on avait simplement pas regroupé tous les termes entre eux).

**Remarque.** On a défini les relations de récurrence dans le point précédent. On s'est cantonné à l'ordre $1$, c'est-à-dire une relation du type : $u_n = f(n, u_{n-1})$ pour une certaine fonction $f$. Il est néanmoins possible de définir plus généralement des suites définies par récurrence à l'ordre $k$. Par exemple, à l'ordre $2$, on s'attend à avoir une relation du type : $u_n = f(n, u_{n-1}, u_{n-2})$.

**Exemple.** L'exemple typique est celui de la suite de Fibonacci : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et plus généralement $u_n$ est défini tel que :

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \text{ pour } n \geqslant 2 \tag{4.9}$$

On a néanmoins omis un "*léger*" détail : on ne va travailler qu'avec des suites récurrentes **linéaires** d'ordre $k$. (C'est-à-dire que l'on ne va pas avoir des produits apparaissant dans la formule de récurrence type $u_{n-1}^3$ ou encore $u_{n-1}u_{n-3}/u_{n-6}$ (ou pire, l'intervention de fonctions transcendantes ou autre, e.g. $\sin(u_{n-1})$).)
Il va être intéressant de constater qu'avec un ordre différent de $1$, les simples démonstrations par récurrence habituelles ne suffisent plus. On requiert des **récurrences fortes**, d'ordre $k$ disons. On ne les détaille pas ici (voir par exemple [Wac21]).
Un dernier détail, sans doute, pour finir sur les présentations : rapidement, on remarque que pour définir convenablement une suite récurrence (linéaire) d'ordre $k$, il convient de définir $k$ termes initiaux $(u_0, u_1, \ldots, u_{k-1})$. En particulier, pour les relations de récurrence que nous verrons ($k = 1$), il convient que $u_0$ soit défini! Ce $u_0$ est appelé *graine* de la fonction. Quelques fois (rarement en Terminale, bien plus souvent dans la vraie vie), des propriétés de ladite suite dépendent de la graine (concernant la convergence par exemple).

Ahhh, j'ai dit une bêtise, on est sur des choses encore plus simples que prévues, les relations ne sont pas du style :

$$u_n = f(n, u_{n-1}, \ldots, u_{n-k}) \tag{4.10}$$

mais

$$u_n = f(u_{n-1}, \ldots, u_{n-k}). \tag{4.11}$$

Je ne sais pas s'il existe une sorte de théorie générale des suites "récurrentes" : version linéaire et (surtout) version non linéaire. Ça doit taper fort et rejoindre de gros sujets comme la théorie des systèmes dynamique, la théorie ergodique... Il y aurait apparemment de sacrées généralisations : les *holonomic functions*. De manière générale, il y a quand même des trous, des grosses choses qu'il reste à démontrer (voir par exemple le *problème de Skolem*).

En y repensant maintenant, l'utilisation que l'on fait des suites au lycée (voire même au début de l'enseignement supérieur) reste très décevant. C'est franchement plus de la modélisation que de l'utilisation pure d'un concept mathématique. (Les systèmes dynamiques pourraient m'intéresser, je suppose.)

#### 4.2.1.2 Vocabulaire des suites

Sans surprise, basé sur le modèle des fonctions, les suites vont hériter de tout un vocabulaire initialement "propre" aux fonctions (sens de variation, monotonie, majoration/minoration...). À quelques exceptions près (intuitivement, parler de continuité usuelle pour les suites ne fait aucun sens vu que "y'a des trous", en revanche pour une certaine topologie [use] toutes les "suites deviennent continues" ; fin, c'est un peu tricher...).

##### 4.2.1.2.1 Sens de variation

**Définition 4.2.2** (Cours Terminale)**.** On se donne une suite $(u_n)$ quelconque. La suite $u$ est dite :

- **croissante** (resp. strictement croissante) lorsque pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n > 0$) ;
- **décroissante** (resp. strictement décroissante) lorsque pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ (resp. $u_{n+1} - u_n < 0$) ;
- **monotone** (resp. strictement monotone) lorsqu'elle est *soit* croissante *soit* décroissante (resp *soit* strictement croissante *soit* strictement décroissante) ;
- **constante** lorsque pour tout entier naturel $n$, on a $u_{n+1} = u_n$.

**Remarque.** On peut adapter les définitions en les ré-écrivant, de manière (quasi) équivalente, sous formes de quotient (e.g. si (et seulement si) $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ alors la suite $u$ est constante). Néanmoins, on doit de plus supposer que la suite ne s'annule jamais (pour ne pas avoir de problème de division par zéro).

**Définition 4.2.3** ([Bon09])**.** La suite $(u_n)$ est dite **stationnaire** lorsqu'il existe un nombre entier $p$, tel que pour tout nombre entier $n$ supérieur ou égal à $p$ on ait $u_n = u_p$.

Donc une suite stationnaire est constante à partir d'un certain rang (elle "stationne").

**4.2.1.2.2 Bornes** Même si on a (sans doute) relativement esquivé toutes les discussions sur les ordres, ça ne va pas nous empêcher de parler (au moins à la volée) de suites majorées, minorées, bornées.

**Définition 4.2.4** (Cours Terminale)**.** La suite $(u_n)$ est dite **majorée** lorsqu'il existe un réel $M$ fixé tel que pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

**Définition 4.2.5** (Cours Terminale)**.** La suite $(u_n)$ est dite **minorée** lorsqu'il existe un réel $m$ fixé tel que pour tout $n$ appartenant à $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

**Définition 4.2.6** (Cours Terminale)**.** La suite $(u_n)$ est dite **bornée** lorsqu'elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire qu'il existe $m$ et $M$ deux nombres réels tels que : $m \leqslant u_n \leqslant M$ pour tout entier naturel $n$.

Il convient de noter que le majorant (c'est-à-dire $M$) et le minorant (c'est-à-dire $m$) doivent être indépendants, ils ne doivent pas dépendre de $n$. À noter également qu'il faut faire attention à l'espace sur lequel on travaille (le résultat ne sera pas forcément le même si l'espace est complet ou pas) [du moins, cette dernière remarque s'applique plutôt pour un raffinement des notions de majorants et minorants : le $\sup$ et l'$\inf$ ; on verra plus tard].

Juste "parce que", si une suite $u$ est bornée alors : $|u_n| \leqslant \max(\max(-m, m), \max(-M, M))$.

#### 4.2.1.3 Exemples de suites élémentaires : arithmétiques et géométriques (rappels)

On expédie cette sous-sous-section car pas franchement intéressante. C'est surtout pour avoir les résultats quelques part disons. La seule différence avec mon cours de Terminale réside dans le fait que désormais : faut que je démontre tout ! Les deux exemples de suites que l'on va voir (arithmétiques et géométriques) sont, en gros, les trucs les plus naturels (et pas compliqués) que l'on peut croiser aux premiers abords.

##### 4.2.1.3.1 Suites arithmétiques

**Définition 4.2.7** (Cours Terminale)**.** Dire qu'une suite (récurrente) $(u_n)$ est **arithmétique** signifie qu'il existe un réel noté $r$ tel que pour tout entier positif $n$ :

$$u_{n+1} = u_n + r. \tag{4.12}$$

Le nombre $r$ est appelé **raison** de la suite.

On manie un objet simple, c'est bien car on sait quasiment tout faire avec (en particulier passer de la formule définie par récurrence à la formule explicite !). Ainsi :

**Proposition 4.2.8** (Cours Terminale)**.** Si $u$ est une suite arithmétique de raison $r$ et de premier terme $u_0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr. \tag{4.13}$$

On ne prouve pas directement cette proposition, on va en montrer une autre à peine plus générale de laquelle découle la proposition ci-dessus :

**Proposition 4.2.9** (Cours Terminale)**.** Si $u$ est une suite arithmétique de raison $r$, alors : pour tous les entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p < n$ [a] :

$$u_n = u_p + (n - p)r. \tag{4.14}$$

En particulier, on retrouve bien le résultat de la proposition 4.2.8 précédente pour $p = 0$.

*a.* Cette hypothèse est bizarre, cf, dans la démonstration.

**Démonstration.** Tout d'abord, même si cela ne constitue en aucun cas une preuve complète / au-delà de la vérification, on vérifie que la formule est "cohérente" (c'est-à-dire qu'elle satisfait à la définition 4.2.7). Pour ce faire, on calcule $u_{n+1}$, on forme la différence $u_{n+1} - u_n$ et constate que c'est bel et bien égal à $r$ :

$$u_{n+1} = u_p + (n+1-p)r \tag{4.15}$$

d'où :

$$u_{n+1} - u_n = u_p + (n+1-p)r - (u_p + (n-p)r) = u_p - u_p + r[(n+1-p)-(n-p)] = r[n+1-p-n+p] = r \tag{4.16}$$

Bingo. C'est bien et bien logique que les $p$ disparaissent au passage! En retombe sur nos baskets.

Tant qu'à faire, on va le démontrer par récurrence! Et, c'est le fait de penser à faire une récurrence qui m'a fait constater un défaut dans les définitions : mais où est la graine? Par abus de langage, par facilité, elle a été esquivée. Bref, venons-en à notre récurrence :

Soit $P(n)$ la proposition mathématique "assertant" / attestant de la véracité comme quoi la formule explicite d'une suite arithmétique de raison $r$ est bel et bien : $u_n = u_p + (n-p)r$.

- ⋆ **Initialisation** : il convient de démontrer que $P(n_0)$ est vraie, où $n_0$ est la graine de la suite $u$. Calculons $u_p$ pour un $p$ quelconque inférieur à $n$ : $u_p = u_p + (p-p)r$. La formule est celle attendue, l'initialisation est vérifiée. [a]
- ⋆ **Hérédité** : on va chercher à montrer que pour tout entier naturel $n$ et $p$ plus grands que la graine, si $P(k)$ est vrai alors $P(k+1)$ l'est aussi (pour un $k$ allant fictivement jouer le rôle du $n$ dans l'hérédité). Par hypothèse, on suppose que $P(k)$ est vrai, c'est-à-dire que $u_k = u_p + (k-p)r$. Considérons la quantité $u_k + r$, on en déduit immédiatement qu'elle est, par hypothèse, égale à $u_p + (k-p)r + r = u_p + (k+1-p)r = u_p + ((k+1)-p)r = u_{k+1}$.

On conclut alors que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ (plus grand que la graine). Donc la proposition est vraie. □

*a.* Oh y'a une merde là, ça ne respecte pas le inférieur. On remplace $n$ par $p$ donc ça les suppose égaux, or selon les hypothèses, ce n'est pas censé être possible. Y aurait-il une merde? Ça paraît carrément superflus de supposer $p < n$, par exemple si $p = n+1$ : $u_n = u_{n+1} + (n-n-1)r$ Gné, ça fait exactement ce que c'était censé faire... Donc l'hypothèse doit être foireuse. D'autant plus que, par exemple, [Bon09] ne fait pas une telle hypothèse, l'auteur suppose juste que $n$ et $p$ sont supérieurs ou égaux à la graine.

Ensuite, on a quelques petits résultats sur la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique et le sens de variation d'une suite arithmétique de raison $r$.

Une somme tout à fait naturelle à considérer est la suivante :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \tag{4.17}$$

Géométriquement, on peut trouver le résultat très aisément (à condition que l'on réussisse à voir la bonne figure et que l'on cherche à en calculer l'aire). Ou alors on peut le trouver directement en raisonnant "par paquet" :

$$S_n = \begin{matrix} 1 & +1 & +1 & +\dots & +1 \\ & 1 & +1 & +\dots & +1 \\ & & 1 & +\dots & +1 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & +1 \end{matrix} \tag{4.18}$$

Il suffit juste de remarquer que : si l'on additionne par paquet de ligne, on obtient que

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(n-k) = n\sum_{k=0}^{n} 1 - \sum_{k=0}^{n} k = n(n+1) - S_n. \tag{4.19}$$

D'où alors tout simplement : $2S_n = n(n+1)$, ce qui permet de conclure.

Un tel résultat s'intègre parfaitement concernant les suites arithmétiques dans la mesure où $(S_n)$ est égal à la somme des termes (de $0$ à $n$) de la suite arithmétique de raison $1$ (et de graine $1$). Plus généralement (sous-entendu pour une raison quelconque), on peut calculer la somme de $p$ termes d'une suite arithmétique de raison quelconque :

**Proposition 4.2.10.** La somme de $p$ termes consécutifs d'une suite arithmétiques $u$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=a}^{b} u_k, \text{ avec } b - a = p \tag{4.20}$$

est égale à :

$$(p+1)\frac{u_a + u_b}{2} \tag{4.21}$$

**Remarque.** En particulier, en injectant, on re-déduit la valeur de $S_n$. De la même manière, on déduit que :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}. \tag{4.22}$$

En d'autres termes, l'esprit de la formule se résume à :

$$(\text{nombre de termes à sommer}) \cdot \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}. \tag{4.23}$$

Concernant le nombre de termes à sommer, on fera bien addition à ne pas oublier le fameux $+1$, en effet, par exemple : $u_1$, $u_2$ et $u_3$ constituent trois termes mais $3 - 1 = 2$, donc il ne faut pas oublier de faire la différence des indices des termes extrémaux et d'y ajouter un.

**Démonstration.** On va juste se faire enchaîner les calculs :

$$
\begin{aligned}
S_n &= u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \cdots + u_b && (4.24)\\
&= u_a + (u_a + r) + (u_a + 2r) + \cdots + (u_a + (b-a)r) && (4.25)\\
&= \sum_{k=0}^{b-a} u_a + r\sum_{k=1}^{b-a} k && (4.26)\\
&= (b-a+1)u_a + r\frac{(b-a)(b-a+1)}{2} && (4.27)\\
&= (b-a+1)\frac{2u_a + r(b-a)}{2} && (4.28)\\
&= (b-a+1)\frac{u_a + (u_a + r(b-a))}{2} && (4.29)\\
&= (b-a+1)\frac{u_a + u_b}{2} && (4.30)
\end{aligned}
$$

d'où la véracité de la proposition. □

Ensuite, il nous reste à étudier le sens de variations des suites arithmétiques :

**Proposition 4.2.11** (Cours Terminale)**.** Si $u$ est une suite arithmétique de raison $r$, alors :

- la suite $u$ est **croissante** si $r > 0$ ;
- la suite $u$ est **décroissante** si $r < 0$ ; ou
- la suite $u$ est **constante** si $r = 0$.

**Démonstration.** Il faut simplement que l'on utilise "la structure" / la nature / la définition 4.2.7 d'une suite arithmétique : une suite arithmétique $u$ (sous sa formulation par récurrence) est de la forme : $u_{n+1} = u_n + r$. Donc, en formant la différence $u_{n+1} - u_n$, on obtient $r$. De fait, le sens de variation de la suite $u$ est entièrement déterminé par $r$. Si $r$ est positif, alors la suite est croissante ; si $r$ est négatif, alors la suite est décroissante ; ou, si $r$ est nul, alors la suite est constante. □

#### 4.2.1.3.2 Suites géométriques

**Définition 4.2.12.** Dire qu'une suite (récurrente) $(u_n)$ est **géométrique** signifie qu'il existe un réel $q$ non nul tel que pour tout entier positif $n$ :

$$u_{n+1} = qu_n. \tag{4.31}$$

Le nombre $q$ est appelé **raison** de la suite.

On manie un objet simple, c'est bien car on sait quasiment tout faire avec (en particulier passer de la formule définie par récurrence à la formule explicite !). Ainsi :

**Définition 4.2.13** (Cours Terminale)**.** Si $u$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 q^n. \tag{4.32}$$

On ne prouve pas directement cette proposition, on va en montrer une autre à peine plus générale de laquelle découle la proposition ci-dessus :

**Proposition 4.2.14** (Cours Terminale)**.** Si $u$ est une suite géométrique de raison $q$, alors : pour tous les entiers naturels $n$ et $p$ tels que $p < n$ [a] :

$$u_n = u_p q^{n-p}. \tag{4.33}$$

En particulier, on retrouve bien le résultat de la proposition 4.2.13 pour $p = 0$.

*a.* À vérifier, mais je me demande si on aurait pas justement le même problème que concernant la proposition 4.2.9.

**Démonstration.** Vérifions rapidement que la formule est cohérente avec la définition 4.2.12 :

$$u_{n+1} = u_p q^{n+1-p} = u_p q q^{n-p} = q u_n \tag{4.34}$$

Perfection. Tout roule, bon, on se refait une petite démonstration par récurrence ?
Soit $P(n)$ l'assertion postulant que la proposition ci-dessus est vraie.

- ⋆ **Initialisation** : il convient de démontrer que $P(n_0)$ est vrai où $n_0$ est la graine de la suite $u$. Il existe alors un $p$ tel que $u_{n_0} = u_p q^{n_0-p} = n_0$. Il suffit de choisir $n_0 = p$. L'initialisation est vérifiée. [a]
- ⋆ **Hérédité** : on va chercher à montrer que pour tout entier naturel $n$ et $p$ plus grands que la graine, si $P(k)$ est vrai alors $P(k+1)$ l'est aussi (pour un $k$ allant fictivement jouer le rôle du $n$ dans l'hérédité). Par hypothèse, on suppose que $P(k)$ est vrai, c'est-à-dire que $u_k = u_p q^{k-p}$. En multipliant de chacun des côtés par $q$, on obtient $u_p q^{k+1-p} = q u_k = u_{k+1}$. Ce qui termine l'hérédité, la véracité de $P(k+1)$ étant conséquence de celle de $P(k)$.

On conclut alors que la proposition $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n$ (plus grand que la graine). Donc la proposition est vraie. □

*a.* J'ai toujours un doute sur mon initialisation, j'ai l'impression que ce n'est pas aussi clair que ce que ça devrait être.

De la même manière que pour les suites arithmétiques on a pu penser à la somme $1+2+3+\cdots+n$, de même, avec les suites géométriques on peut penser à une somme très naturelle :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n. \tag{4.35}$$

On ne va pas donner de preuve complète tout de suite. Voici juste une petite esquisse pour démontrer que $S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ : considérer la quantité $S_n - qS_n$, voir à quoi c'est égal à conclure. Notons tout de même que grâce à cette proposition, on trouve une factorisation intéressante :

**Corollaire 4.2.15.** On a la factorisation suivante :

$$(1-X)(1+X+X^2+\cdots+X^n) = 1 - X^{n+1}. \tag{4.36}$$

On va démontrer un résultat un poil plus général (dans la même veine que 4.2.10 pour les suites arithmétiques) :

**Proposition 4.2.16.** La somme de $p$ termes consécutifs d'une suite géométrique $u$, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=a}^{b} u_k, \text{ avec } b - a = p \tag{4.37}$$

est égale à :

$$u_a \frac{1 - q^{p+1}}{1 - q} \tag{4.38}$$

**Remarque.** Lorsque l'on considère l'équation 4.38, on remarque que $q$ doit être différent de $1$, autrement petit problème de division par zéro. Le cas $q = 1$ est donc un cas particulier ; et, la somme $1 + 1^2 + 1^3 + \cdots + 1^n$ se déduit aisément (on peut également calculer la même somme mais avec une graine différente) !

**Démonstration.** Encore une fois, on va juste se faire enchaîner les calculs :

$$\begin{aligned}
S_n &= u_a + u_{a+1} + u_{a+2} + \cdots + u_b && (4.39)\\
&= u_a + (qu_a) + (q^2 u_a) + \cdots + (q^{b-a} u_a) && (4.40)\\
&= u_a \left[1 + q + q^2 + \cdots + q^{b-a}\right] && (4.41)\\
&= u_a \frac{1 - q^{b-a+1}}{1 - q} && (4.42)
\end{aligned}$$

d'où la véracité de la proposition. □

Ensuite, il nous reste à étudier le sens de variations des suites géométriques :

**Proposition 4.2.17** (Cours Terminale)**.** Si $u$ est une suite géométrique de raison $q$, alors :

- la suite $u$ est **croissante** si $q > 1$ ;
- la suite $u$ est **décroissante** si $0 < q < 1$ ; ou
- la suite $u$ est **constante** si $q = 1$.

**Démonstration.** Il faut simplement que l'on utilise "la structure" / la nature / la définition 4.2.12 d'une suite géométrique : une suite géométrique $u$ (sous sa formulation par récurrence) est de la forme : $u_{n+1} = qu_n$. On forme alors le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (en postulant que l'on a aucune division par zéro), on constate que c'est égal à $q$. En suivant les définitions 4.2.2, y'a qu'à appliquer et dérouler. On obtient bien les résultats escomptés (faut juste faire attention que l'élément neutre pour l'addition n'est pas celui pour la multiplication ; pour qu'un tel argument soit vraiment naturel, il aurait fallu présenter autrement les choses). □

**4.2.1.3.3 Suites arithmético-géométriques** On peut faire le même développement que pour les suites arithmétiques et les suites géométriques. Les suites arithmético-géométriques sont les suites du type $u_{n+1} = qu_n + r$.

Pour les fondamentaux sur les suites, on a globalement fini. On verra dans une section suivante les limites et histoires de convergence et divergence. On laisse également de côté les suites définies par récurrences linéaires à coefficients constants (ou pas) [8], on met de côté les développements sur les suites arithmético-géométriques et on développera sans doute les homographies (et leurs relations avec les suites) plus tard, dans un autre cadre où cela aura un sens (l'idée n'est pas de présenter pour présenter mais également de se questionner) !

Néanmoins, même si l'on met de côté (temporairement) les développements sur les suites arithmético-géométriques, on peut sans doute faire une légère remarque (qui peut sacrément débloquer des situations) : ce n'est pas car une suite (ou un "objet") n'a pas l'air d'être ce qu'il est que l'on ne peut pas utiliser tout l'attirail qui lui gravite autour ! Certaines fois, en "transformant" l'objet (la suite dans ce qui va suivre), on peut débloquer la situation ! (Attention, il ne faudra pas oublier de "dé-transformer" l'objet, car on veut un résultat sur l'objet $o$ et non sur $T(o)$ l'objet transformé !) Voyons un exemple : disons que l'on dusse étudier la suite suivante :

$$t_{n+1} = \frac{\sqrt{t_n}}{e}. \tag{4.43}$$

On peut soit se dire "Merde!", soit essayer de ruser. Pensons [9]. Quel transformation serait susceptible de donner une forme plus appréciable à $t_n$ ? Jusqu'alors, le peu sur les suites que nous ayons vu se rapporte à des liens à quelque chose de l'ordre un (c'est-à-dire entre $u_n$ et $u_{n+1}$) bien linéaire et avec "maximum" une multiplication par un scalaire. En somme, on dealait surtout avec des additions [10]. Or ! Notre $t_{n+1}$ s'exprime comme un quotient (c'est-à-dire une multiplication déguisée) ! Connaîtrions-nous un objet qui transforme les multiplications en additions ? Bonjour cher **logarithme** ! Introduisons alors à cet effet la suite :

$$\omega_n = \log(t_{n+1}) = \log\left(\frac{\sqrt{t_n}}{e}\right) = \log\left(\sqrt{t_n}\right) - \log(e) = \frac{1}{2}\log(t_n) - 1 \tag{4.44}$$

On en conclut alors que $\omega_n = \frac{1}{2}\omega_{n-1} - 1$ et il n'y a alors plus qu'à dérouler les calculs (que nous n'avons certes pas vu mais qui se déduisent aisément, notamment guidés par les premiers exercices de la nouvelle version du polycopié [LLG21]).

8. Un léger développement sera fait dans la partie 7.4.3.

9. Plutôt que "posons", pour pouvoir poser il faut avoir penser et à chaque fois que quelqu'un dit "posons" suivi d'une expression assez compliquée voir pas forcément naturelle, ça n'aide en rien (mis à part à résoudre l'exercice comme un assisté).

10. Je concède que ce puisse être une explication branlante qui s'acquiert ainsi que quand on a une petite idée de la solution...

### 4.2.2 Fonctions usuelles

### 4.2.3 Limites

### 4.2.4 Convergence, divergence

### 4.2.5 Dérivation

### 4.2.6 Intégration

#### 4.2.6.1 Présentation

Apparemment c'est totalement parti en couilles, il y aurait un truc que l'on appelle l'intégration motivique et ça fuse!!! Il y a des histoires d'intégration convexe, l'intégration de fonctions p-adiques, des histoires d'opérateurs à noyaux... bref beaucoup beaucoup de choses. Nous, franchement, on va se contenter de considérations très élémentaires sur l'intégrale de Riemann (déjà...). On va la construire, en tirer les fruits et essayer de voir jusqu'à quel point elle peut être intéressante (ou pas). Ensuite, pourquoi pas envisager de pousser un riquiqui plus loin (pas jusqu'à Lebesgue non plus [11]) mais au moins se balader un petit peu. Encore une fois, on démontre tout, donc : je me mets dans la merde si je cite quelque chose de trop compliqué.

Parce que le covid, j'ai eu un cours à l'arrachée, va falloir que je me démerde.

(Feu) Jean-Pierre Demailly (1957 – 2022) [Dem07] présente ainsi la manière dont est abordée l'intégration dans l'enseignement :

> — En terminale, une première étape qui consiste à introduire l'intégrale comme "aire sous la courbe", avec un état d'esprit qui se ressent obligatoirement de l'appauvrissement continuel de la conceptualisation depuis deux décennies; Il en résulte qu'il est devenu très difficile de formaliser complètement la théorie, ce qui veut probablement dire qu'on ne peut guère espérer que le cours donne de véritable démonstrations, mais seulement au mieux quelques indications de preuves complétées par des considérations heuristiques.
>
> — *Dans les premières années d'université, les enseignants présentent en général une version plus ou moins édulcorée de la théorie de "l'intégrale de Riemann", à l'aide d'encadrements par des fonctions en escalier, et des preuves qui tendent de plus en plus à disparaître du fait du recul des connaissances fondamentales requises (pratique des $\epsilon$ et $\delta$, continuité uniforme...).*
>
> — *En Master 1ère année apparaîtra dans les bons cas une théorie plus solide de l'intégration reposant sur la théorie de la mesure et l'intégrale de Lebesgue.*

11. Quoique, le premier chapitre du Rudin [RD09] a vraiment l'air très facile et propre.

> *Mais il est de notoriété publique que ce sujet qui fâche a tendance aujourd'hui à être de moins en moins traité, surtout dans les filières dites "Master enseignement".*
>
> *Cette situation présente de nombreux inconvénients. La théorie de l'intégrale de Riemann n'est pas une "bonne théorie", ni du point de vue didactique ni du point de vue mathématique. La présentation n'en est pas très simple : il faut manipuler constamment des encadrements de fonctions, utiliser la continuité uniforme pour démontrer l'intégrabilité des fonctions continues, faire des découpages de $\epsilon$ et $\delta$ parfois peu éclairants. Il y a de nombreuses restrictions ou pathologies, des théorèmes essentiels comme ceux de la convergence monotone ne sont pas valables, etc. Plus tard l'introduction de l'intégrale de Lebesgue viendra balayer ce travail en montrant qu'il s'agissait en fait d'une théorie bancale et incomplète. Si les étudiants échappent à l'intégrale de Lebesgue – comme cela arrive à un nombre de plus en plus grand de CAPESiens – ils n'auront donc jamais eu l'occasion de se voir exposés une théorie "sérieuse" de l'intégration, ce qui est préoccupant.*

J'ai l'impression de comprendre le discours de Demailly, néanmoins, pas le recul pour juger mais il y a des choses qui font tilt dans ma tête : par exemple, il dit qu'il faut "*constamment manipuler des encadrements de fonctions*" (pour appuyer le fait que ce n'est pas très simple). Sans entrer dans les considérations sur ce que peut être une "bonne théorie", l'esprit de l'Analyse n'est-il pas de "*MAJORER, MINORER, APPROCHER*" [Die80] ?

On commence ("historiquement") avec des problèmes de quadrature. Les premiers problèmes (d'origine géométrique) que l'on rencontre au collège reposent sur la détermination de l'aire de rectangles, triangles, trapèzes, disques... Aux vues de certaines formules et de ""l'ingéniosité"" qui nous était parfois demandé pour calculé une aire de rien du tout (e.g. découper la figure en un certain nombre de polygones), on se demande quand même s'il n'y aurait pas franchement plus simple?! Ou du moins plus général, plus "polymorphe", adaptable?

#### 4.2.6.2 Construction élémentaire de l'intégrale de Riemann

La première fois que j'ai vu l'intégrale de Riemann de définie (et de construite moyennement / peu rigoureusement), c'était en troisième dans le *No Bullshit Guide to* [Sav14]. Je me souviens qu'un peu avant, suite à mon stage de troisième, j'avais essayé de la reconstruire (de manière foireuse mais l'idée était là il me semble). Maintenant, faut faire proprement les choses. En plus de cela, on va être un peu ambitieux et prévoir de faire le programme du Gourdon [Gou20] plutôt que celui de Terminale (enfin... on va faire les deux mais expédier celui de Terminale en première partie). Et pour le défi, on va même tenter quelques exercices et problèmes du Gourdon (je ne connais pas vraiment le niveau)!!! Et tant qu'on y ait, une petite troisième partie très vue par dessus l'épaule, Bourbaki a sorti dix chapitres sur l'intégration [Bou07d], [Bou07a], [Bou07b], [Bou07e] et [Bou07c].

**4.2.6.2.1 Niveau Terminale** À vrai dire on n'a aucunement construit l'intégrale de Riemann. On l'a quasiment prise comme une définition :

**Définition 4.2.18** (Cours Terminale)**.** Soit $f$ une fonction continue positive sur un intervalle $[a, b]$ (avec, $a < b$). L'aire, exprimée en unité d'aire, délimitée par la courbe $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est appelée **intégrale de** $a$ **à** $b$ **de** $f$. On la note :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x. \tag{4.45}$$

Ainsi :

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{Aire}_D \tag{4.46}$$

où $D = \Big\{M(x; y) \text{ tel que } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\Big\}$.

Alors petit problème, même si on se doute de ce que peut bien être $M(x; y)$, on n'en a pas eu la définition. Avec le recul, je ne vois pas à quoi ça sert de s'emmerder à donner un tel formalisme "en dents de scies" si c'est pour gâcher autant de chose. À ce rythme là, autant faire les choses purement géométriquement et gérer la transition quand faudra parler de primitives en se disant quelque chose comme : l'intégrale permet de *mesurer* globalement des choses; une primitive est alors "simplement" l'expression algébrique (à la nature analytique également) d'une mesure géométrique.

Après coup, je me rends compte que l'on avait vraiment pas fait grand chose (le mieux était une démonstration du théorème fondamental de l'analyse (dans un cas particulier)). À quoi bon les développer maintenant dans la mesure où Gourdon les reprend, gné.

**4.2.6.2.2 Gourdon** Ça va être sportif. On se lance dans le chapitre trois du Gourdon [Gou20]. On est parti pour tout faire. Idéalement, l'ensemble du chapitre va être petit à petit recopiée tout en l'étoffant de divers commentaires, en faisant les démonstrations manquantes et en éclaircissant des choses qui sont peut-être évidentes, triviales pour l'auteur mais pas pour moi. Deux jours ne suffiront pas je suppose. Pour être combatif et jouer le jeu, on va essayer de fonctionner à plutôt bon régime.

Tant que j'y pense, petit problème : Gourdon n'étudie pas "simplement" le cas des fonctions à valeurs réelles mais se place dans un Banach. Or, ça, certes on a eu une section plus tôt (cf. 3.2.5.2), mais à l'heure où j'écris je ne l'ai pas faite (éhéh) et je n'en sais pas franchement grand chose (au-delà de quelques lacunaires définitions). On va se faire notre petite fiction : tant que Gourdon ne semble pas utilisé des trucs propres aux espaces de Banach, on ne se pose pas trop de questions; aux moments où des doutes apparaissent, on avisera.

On va avoir le droit à quatre parties (dont les contenus sont carrément hors programme de Terminale et on s'en fout franchement) :

- intégrale sur un segment de $\mathbb{R}$ ;
- calcul de primitives ;
- intégrale sur un intervalle quelconque ;
- intégrales dépendant d'un paramètre, équivalents intégrales.

Commençons par survoler rapidement les résultats pour voir si je perçois déjà des endroits où je sais que ça va être difficiles (en dehors des exercices et problèmes sur lesquels je vais sécher je sens).

Comme pressenti, il y a des notions algébriques que je ne maîtrise pas aussi bien que ce que je voudrais (Banach, espace vectoriel...), la continuité (uniforme ou pas) sur laquelle je ne suis pas parfaitement au point ($\epsilon$ et $\delta$) idem pour les normes (idem pour les espaces vectoriels normés et plus ou moins aussi pour les espaces métriques), il semblerait que des objets de nature topologique fassent leur apparition (intérieur...) faudra se remettre sur les chapeaux de roue, j'ai jamais manipulé de suites de fonctions ni les $o$ et $O$ de Landau, .

On va profiter de chacune des occasions pour voir ou revoir et approfondir des notions aujourd'hui problématiques ! Je vais essayer de ne pas regarder les démonstrations proposées et les refaire par moi même (toutes si possible). À noter que le Gourdon manque cruellement de dessins (au travail !).

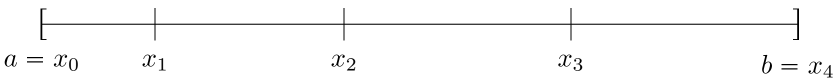
Je vais en profiter pour introduire le $\sup$ et l'$\inf$ version Tao [Tao20] (utile pour les sommes de Riemann).

#### 4.2.6.2.2.1 Intégrale des fonctions en escalier

**Définition 4.2.19** ([Gou20]). On appelle **subdivision** de $[a, b]$ toute partie finie de $[a, b]$ contenant $a$ et $b$. Si $\sigma$ est une subdivision de $[a, b]$, on peut écrire $\sigma = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ avec $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$. C'est en général la notation employée pour désigner une subdivision.
On appelle **pas** (ou *module*) de la subdivision $\sigma$, noté $|\sigma|$, le réel $\sup\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - x_{i-1})$.

Déjà, première question qui me taraude, pourquoi prendre le $\sup$ ? Ou plutôt, pourquoi le maximum ne suffit-il pas ? Est-ce que ça proviendrait du fait que dans le cas du $\max$ on puisse avoir le problème suivant (?) : le pas pourrait-il ne pas forcément "appartenir à l'intervalle" (une des différences entre max et $\sup$ étant : *le max fait partie d'un ensemble alors que le* $\sup$ *n'en fait pas forcement partie*) ? Si on avait un maximum, vu que l'on a un *fermé* $[a, b]$ je vois mal comment on pourrait être emmerdé (sur un ouvert ça pourrait prendre plus de sens de s'intéresser au $\sup$)... Demailly [Dem07] ne s'embête même pas, il dit simplement que le pas est égal à la différence $x_1 - x_{i-1}$ (peut être car il travaille sur un fermé avec des fonctions positives (donc même pas besoin de valeur absolue, un pas (étant une longueur) doit être positif). De toute façon, il est bien mignon avec son $|\sigma|$ mais je ne sais même pas s'il compte l'utiliser de nouveau (au moins sérieusement). (Ah si, il s'en sert une fois pour les sommes de Riemann.) De Marçay [dMb], lui, utilise le $\max$ et non le $\sup$, hmmm.

Ensuite, on comprend assez bien ce que peut être une subdivision. En général, elle n'a pas de raison d'être *régulière* (comprendre par là, à pas constant ; c'est-à-dire que la fonction dépendante de $i \mapsto x_i - x_{i-1}$ est constante, ainsi tous les "bouts" d'intervalles sont de longueur égale). Elle peut par exemple ressembler à cela :




On va désormais définir ce qu'est l'objet central de ce paragraphe : les fonctions en escalier. Ce n'est qu'après que le jeu va véritablement commencer : **réussir à trouver une subdivision** (régulière de préférence pour se faciliter la vie, on verra) **adaptée à la fonction en escalier** (est-ce qu'il existe une telle subdivision pour toute fonction en escalier ? ...). Le but du jeu se résume alors ainsi : décomposer le domaine d'étude de la fonction en une multitude de sous-domaines très faciles à traiter (des droites parallèles à l'axe des abscisses). **Oh merde j'ai raisonné à l'envers!!!** On va voir pourquoi après la définition que voici :

**Définition 4.2.20** ([Gou20]). Une application $\varphi : [a, b] \to E$ (où $E$ est un Banach) est dite **en escalier** s'il existe une subdivision de $[a, b]$ :

$$\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \tag{4.47}$$

telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi$ soit constante sur $]x_{i-1}, x_i[$.

**Remarque.** Gourdon dit qu'une telle subdivision $\sigma$ est alors *bien adaptée* à $\varphi$ (en le sens qu'elle trivialise les calculs dans la mesure où l'on n'a plus qu'à considérer des "morceaux" constants de la fonction).

Eh oui, on définit les fonctions en escaliers par l'existence d'une subdivision. On ne peut pas alors se demander si une subdivision adaptée à la fonction en escalier existe. Gné. Je postulais le fait que l'on puisse définir une fonction en escalier sans recours au subdivision. On aurait alors à démontrer qu'il existe bel et bien une subdivision (simple problème de style, formel). Ça permet de raisonner avec des objets un poil plus généraux. À vrai dire, j'aurai simplement défini une application en escalier comme :

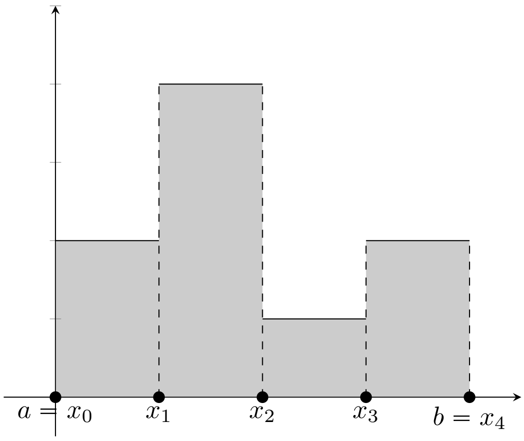
**Définition 4.2.21** (Proposition de définition). Une application $\varphi : [a, b] \to E$ (où $E$ est un Banach) est dite **en escalier** si elle coïncide en tout point de son domaine de définition avec <u>une</u> fonction constante. (À noter qu'elle peut donc être représentée par plusieurs fonctions constantes ; on souhaite juste quelle soit constante partout sur son domaine de définition, mais pas forcément globalement constante.)

Alors, pour démontrer qu'il existe effectivement une subdivision de son domaine de définition, noté $[a, b]$, il suffit de construire la fonction $\psi$ qui associe (dans l'ordre) à chaque fonction constante l'indice du "bout" de sa subdivision, la subdivision sera alors composée des $x_{\psi(\cdot)}$. Néanmoins quelques précisions doivent être faites (en plus du problème si ce truc est ou pas une fonction de choix ?, question laissée de côté) : est-ce qu'une telle fonction est vraiment constructible ? De manière algorithmique, j'en ai quasiment la certitude : essayons : Tout le problème ensuite, va consister à trouver des subdivisions régulières (pour se faciliter

**Entrée:** intervalle : $[a, b]$, application : $\varphi : [a, b] \to E$
**Sortie:** liste (des indices) : []
  $liste \leftarrow []$
  $i \leftarrow a$
  **tant que** $i \in [a, b]$ **faire**
    **si** $\varphi(i) = \varphi(a)$ **alors**
      Ajouter à la liste un indice (dans l'ordre croissant, on commençant à zéro)
    **fin si**
    Incrémenter $i$ jusqu'à ce que $\varphi(i) \neq \varphi(a)$
    $a \leftarrow i$
  **fin tant que**

les calculs). On sait déjà que, par construction, notre subdivision est *bien adaptée*. En effet, $\phi$ va être constante sur chaque $]x_{i-1}, x_i[$.

Avant d'aller plus loin, commençons à visualiser le bordel. Disons que l'on se fixe une fonction $\varphi$ :




Putain, ça a été un de ces bricolages pour faire ce graphique! Bref...

On a alors une subdivision $\sigma = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Si l'on s'en tient à la définition 4.2.20, alors $\varphi$ est une fonction en escalier (même résultat avec la tentative de redéfinition 4.2.21). Pour des fonctions comme celles ci, ça ne reste franchement pas méchant : on n'a pas besoin de faire intervenir la notion de **subdivision "plus fine"** qu'une autre. C'est plus tard que les choses vont se complexifier! Pour l'instant, ça reste bon enfant. Bon enfant à tel point, qu'en soi, on a fini! Dans la mesure où on est totalement capable d'exprimer l'air sous la courbe de chaque portion de la fonction $\varphi$, en gros, on sait calculer l'intégrale de cette fonction! De ce fait, l'intégrale d'une fonction en escalier est visée par la définition suivante :

**Définition 4.2.22.** Soit $\varphi : [a, b] \to E$ (où $E$ est un Banach) une fonction en escalier. Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a, b]$ bien adaptée à $\varphi$, de sorte que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $c_i \in \mathbb{E}$ tel que $\varphi(x) = c_i$ sur $]x_{i-1}, x_i[$. La valeur

$$I(\sigma, \varphi) = \sum_{i=1}^{n} (x_1 - x_{i-1}) c_i \tag{4.48}$$

est indépendante de la subdivision $\sigma$ adaptée à $\varphi$. On la note alors $I(\varphi)$ ou encore $\int_{[a,b]} \varphi$ ou $\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x$ et on l'appelle **intégrale de** $\varphi$.

**Remarque.** Il est très évident que $I(\varphi)$ soit indépendante de la subdivision $\sigma$ adaptée à $\varphi$. En revanche, le montrer est une autre paire de manche. Est-ce la sans doute un des écueils dans la manipulation de l'intégrale de Riemann (que l'on est presque en train de commencer à construire) : c'est beaucoup d'effort pour des choses évidentes.
Admettons que l'on veuille montrer un tel résultat. Alors, il faut définir la notion de **subdivision** $\sigma'$ **plus fine que** $\sigma$ et montrer que quelque soit la subdivision (sous-entendue plus fine qu'une subdivision $\sigma$ donnée), alors on obtient bel et bien le même résultat sans aucune référence à la subdivision (tant qu'elle est bien adaptée à $\varphi$). Est-ce que l'on ne pourrait pas le montrer un peu à la va vite en supposant deux subdivisions différentes bien adaptées à $\varphi$ et montrer que cela conduit au même résultat ? Franchement je pense.

On va désormais prouver quatre petits résultats afin de s'échauffer.

**Proposition 4.2.23.** Toute fonction en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans (un corps) $\mathbb{K}$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques de segments contenus dans $[a,b]$.

**Démonstration.** Afin de prouver le résultat, on a besoin de savoir comment se définit précisément une fonction caractéristique :

**Définition 4.2.24** ([Gou20])**.** Pour toute sous-ensemble $A$ de $E$, on notera $\chi_A : A \to \{0,1\}$ la **fonction caractéristique de** $A$ définie par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ sinon.

Ainsi, la *fonction caractéristique de segment contenus dans* $[a,b]$ vaut $1$ si le segment appartient à $[a,b]$ et $0$ sinon. Profitons-en vite fait pour rappeler ce qu'est une combinaison linéaire :

**Définition 4.2.25** ([Gou21])**.** Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $E$. On appelle **combinaison linéaire** des $(x_i)_{i\in I}$ toute somme $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ où pour tout $i$, $\lambda_i \in \mathbb{K}$ et où tous les $\lambda_i$ sont tous nuls sauf un nombre fini.

En clair, l'énoncé nous propose de démontrer que : pour tout fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ :

$$\varphi = \sum \lambda_i \chi_{\mu_i} \tag{4.49}$$

où $\mu_i \subset [a,b]$ et où l'ensemble des indices formé des $i$ est pris dans $[\![0,n]\!]$.
Il nous faut montrer que la réécriture de $\varphi$ comme ci-dessus est toujours possible pour chaque fonction en escalier. On va procéder par construction en attachant à chaque $\varphi$ une telle réécriture. Par définition (4.2.20), $\varphi$ est constante sur tous les bouts $]x_{i-1},x_i[$ de sa subdivision. Donc l'idée est simplement de multiplier convenablement (c'est-à-dire avec le bon "bout") le $\lambda_i$ correspondant à la hauteur $\varphi(x)$ pour tout $x \in ]x_{i-1},x_i[$ si et seulement si on est dans le bon intervalle. La manière de vérifier que l'on est dans le bon intervalle est d'utiliser la fonction caractéristique. Une fois que l'on a déterminé le $\lambda_i$ et la fonction

caractéristique de chaque intervalle, il ne reste qu'à sommer le tout pour reconstruire le entièrement domaine de définition de $\varphi$ et ainsi obtenir le résultat escompté. $\square$

**Remarque.** Les $\lambda_i$ de la démonstration correspondent avec les $c_i$ de la définition 4.2.22. En effet, l'idée derrière la formule $I(\sigma, \varphi) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i$ est que l'on multiplie le $c_i$ par un "élément" (mesuré) de la subdivision (c'est-à-dire que l'on multiplie un $c_i$ par un élément de la subdivision si et seulement si la fonction caractéristique attachée à tout intervalle contenu dans l'élément de la subdivision vaut $1$, autrement, on peut multiplier par ce que l'on veut, ça n'a pas d'importance car la fonction caractéristique vaut $0$) [a].

*a.* À reformuler, gné.

**Proposition 4.2.26** ([Gou20])**.** Pour toute fonction en escalier $\varphi$, $||\varphi||$ est une fonction en escalier et $||I(\varphi)|| \leqslant I(||\varphi||)$.

**Démonstration.** On ne va pas redéfinir en long en large et en travers ce qu'est l'opération $||\cdot||$ (sachons simplement que c'est égal à $\mathrm{d}(0, x)$ et plus généralement que l'on peut associer à une norme une distance).
Supposons que $\varphi$ soit une fonction en escalier. On veut alors montrer que $||\varphi||$ l'est aussi. Ainsi, en accord avec la définition 4.2.20, on souhaite montrer qu'il existe également une subdivision telle que $||\varphi||$ soit constante sur tout "bout" de cette subdivision. En gros, on cherche à montrer que la fonction $\phi : \varphi \mapsto ||\varphi||$ préserve la propriété d'être une fonction en escalier.
Dans la mesure où une norme est toujours positive, on remarque que (sans problèmes de symétries à gérer dus à un signe négatif ou autre) la fonction $||\varphi||$ hérite de la subdivision de $\varphi$ ainsi que du fait qu'elle soit constante sur tout bout de la subdivision.
Prouver la deuxième partie de la proposition, c'est-à-dire :

$$||I(\varphi)|| = \left|\left|\sum_{i=1}^{n}(x_1 - x_{i-1})c_i\right|\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}(x_1 - x_{i-1})||c_i|| = I(||\varphi||) \tag{4.50}$$

[a] est conséquence d'une répétition de l'inégalité triangulaire $||\zeta_1 + \zeta_2|| \leqslant ||\zeta_1|| + ||\zeta_2||$. $\square$

*a.* J'espère que je ne me suis pas trompé sur la manière de gérer le bins, en particulier sur l'expression de $I(||\varphi||)$.

**Proposition 4.2.27.** Si $\varphi$ et $\psi$ sont deux fonctions en escalier, à valeurs réelles, et si $\varphi \leqslant \psi$, alors $I(\varphi) \leqslant I(\psi)$.

**Démonstration.** Raisonnement un peu tortueux mais : on part de $\varphi \leqslant \psi$, on applique la proposition 4.2.23 et on conclut. $\square$

**Proposition 4.2.28.** L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], E)$ des fonctions en escalier sur $[a, b]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et l'application $\mathcal{E}([a, b], E) \to E$, $\varphi \mapsto I(\varphi)$ est linéaire.

**Démonstration.** *Structure d'espace vectoriel : à démontrer si j'y pense !*
Pour prouver que l'application qui à $\varphi$ associe $I(\varphi)$ est linéaire, il convient simplement de constater la linéarité de l'opérateur de sommation $\sum$ :

$$I(l_1\varphi_1+l_2\varphi_2)=\sum_{i=1}^{n}(x_1-x_{i-1})[l_1c_{i_1}+l_2c_{i_2}]=\sum_{i=1}^{n}(x_1-x_{i-1})l_1c_{i_1}+(x_1-x_{i-1})l_2ci_2 \quad (4.51)$$

d'où

$$I(l_1\varphi_1+l_2\varphi_2)=l_1\sum_{i=1}^{n}(x_1-x_{i-1})c_{i_1}+l_2\sum_{i=1}^{n}(x_1-x_{i-1})c_{i_2}=l_1I(\varphi_1)+l_2I(\varphi_2). \quad (4.52)$$

□

#### 4.2.6.2.2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Gourdon fait le choix de se limiter à l'intégration de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]\subset\mathbb{R}$.

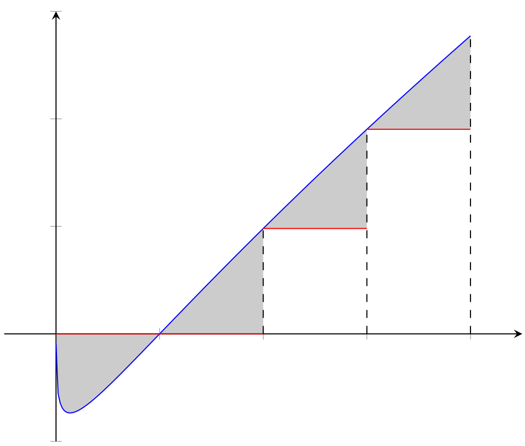
On commence par rappeler ce qu'est une fonction continue par morceaux.

**Définition 4.2.29** ([Gou20]). Une application $f : [a,b] \to E$ est dite **continue par morceaux** s'il existe une subdivision $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ de $[a,b]$ telle que la restriction de $f$ à chaque intervalle *ouvert* $]x_{i-1},x_i[$ soit prolongeable en une fonction continue sur l'intervalle *fermé* $[x_{i-1},x_i]$.

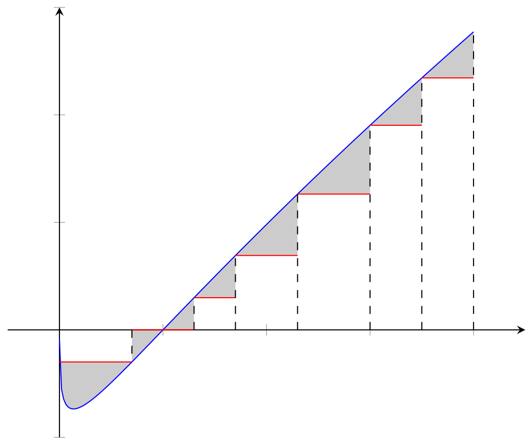
**Remarque.** La condition "prolongeable en une fonction continue sur $[x_{i-1},x_i]$" est importante ; elle équivaut à dire que la limite à droite (resp. à gauche) de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers $x_{i-1}$ (resp. $x_i$) existe.

On définit alors l'intégrale d'une fonction continue par morceaux de manière analogue au cas des fonctions en escaliers.

Gourdon, lui, utilise des histoires de fonctions réglées, flemme. Et si on proposait un algorithme qui construit plus ou moins bien (?) les fonctions en escalier $\varphi_n$ ? Par exemple, l'idée va être de trouver les fonctions en escaliers adaptées telles que l'inégalité $||f-\varphi_n||<1/n$ soit vérifiée. Par exemple, à la louche, pour $n=1$ : les fonctions en rouge conviennent :



pour $n=2$, il faut déjà aller chercher des choses un peu plus fines :



Tiens une question que je me pose : peut-on évaluer le nombre minimal d'éléments de la subdivision pour un $n$ fixé ? À vue de nez, il semblerait que la stratégie payante soit de prendre des bouts d'intervalles les plus grands possibles (c'est-à-dire égaux à $1/n - \epsilon$, pour tout $\epsilon > 0$). Néanmoins, n'a-t'on réellement aucun effet de bord ? Comme des situations, où, localement, il est plus intéressant d'avoir un segment tout petit pour ensuite en avoir un très grand intéressant ? Donc, deux sous problèmes : le plus simple quand on a un pas constant, et plus compliqué avec un pas irrégulier. La situation est d'autant plus compliquée que notre fonction est juste continue par morceaux (on a pas de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ un minimum régulières par exemple).

Si on a du pas constant, en fait, c'est très simple : pour peu que l'on puisse déterminer le $\epsilon$ (c'est-à-dire déterminer le plus grand $\epsilon$ possible tel que l'on ait un nombre minimal d'éléments de la subdivision), tout semble rouler (?). En revanche, pour du pas irrégulier, on peut avoir des stratégies un peu étonnantes je suppose. Bref, le résultat du Gourdon est celui ci :

**Définition 4.2.30** ([Gou20]). Soit une fonction $f : [a, b] \to E$ continue par morceaux. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction en escalier $\varphi_n : [a, b] \to E$ telle que $||f - \varphi_n|| < 1/n$ sur $[a, b]$. La suite $(u_n)$ définie par $u_n = \int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t$ est alors une suite de Cauchy dans $E$, donc convergente. Sa limite ne dépend pas du choix des fonctions en escaliers $\varphi_n$, on la note $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ (ou encore $\int_{[a,b]} f$) et on l'appelle *intégrale de* $f$.

**Remarque.** Ne pas oublier que $E$ est un Banach (c'est-à-dire espace vectoriel normé **complet**), donc les suites de Cauchy convergent !

Encore une fois, de manière algorithmique : aucun problème pour construire les $\varphi_n$ ! Les seuls points délicats résident donc dans le fait de montrer que, "analytiquement", ces $\varphi_n$ existent vraiment et surtout qu'ils satisfont à l'inéquation servie sur son plateau. On comprend bien pourquoi ça "risque très fortement" de marcher, en revanche, pourquoi avoir du $1/n$ ; en soi, si on étudie la démonstration du Gourdon, on est un peu en peine sur ce point : si l'on avait pris du $1/\log(n)$, la démonstration marche tout aussi bien [12] et ça ça n'aide pas ! Je ne vois pas de bonne raison justifiant ce $1/n$, peut-on se débrouiller pour juste demander que $||f - \varphi_n||$ décroisse de manière monotone jusqu'à atteindre $0$ ? Il est un peu chiant monsieur Gourdon, il ne construit pas tellement les choses... il les définit surtout, gné ;

12. Il y a un point qui me pose un peu problème je crois, gné.

ça n'apparaît pas de soi même (enfin si, mais pas naturellement). Essayons de soigner ces quelques carences.

L'idée de la définition 4.2.30 est d'approcher $f$ par une suite de fonction en escaliers. On cherche à contrôler le facteur d'éloignement entre $f$ et le $\varphi_n$ (à $n$ fixé) en se démerdant pour que $f$ et $\varphi_n$ se ressemblent de plus en plus à mesure que $n$ croît. Et ce problème me fait typiquement penser à un que j'ai déjà eu ! J'avais essayé de (penser à) construire une application qui *mesurerait le défaut d'isomorphie* entre un morphisme de groupe et un autre morphisme un peu étonnant (de la même idée qu'un développement de Taylor agit et se "rapproche" d'une fonction donnée). C'est exactement la même idée que l'on mène ici : construire des $\varphi_n$ dont la mesure d'isomorphie avec $f$ s'accroît à mesure que $n$ augmente. Ici, on a quand même pas mal de structure ! Le "seul" problème est que $\varphi_n$ ($n$ fixé) risque de ne pas être unique (cf. tous les problèmes de subdivisions possibles et imaginables et le fait que l'on ait une borne "assez large" $(1/n)$). [13]

Euhhh, non ! J'ai dit un peu de la merde dans le paragraphe précédent : on n'approche pas $f$ par une suite de fonction en escaliers mais, formellement, on approche $\int f$ par l'intégrale de fonctions en escalier. En faisant ça, il a sauté une étape et tout un tas de détail...

Toujours est-il que, comme il le souligne, l'avantage de la définition 4.2.30 est qu'elle ne dépend d'aucune base (dans le sens de définir l'intégrale sur $\mathbb{C}$ en passant par $\mathbb{R}$ au moyen que $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2$).

Ensuite, essentiellement, il n'y a qu'à en déduire l'ensemble des propriétés remarquables et basiques de l'intégrale :

- **relation de Chasles**. Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction continue par morceaux et $c \in ]a,b[$. On a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

  **Démonstration.** Tout d'abord, en raisonnant strictement sur les subdivisons, on constate aisément qu'un choix de $c$ est convenable dans le sens où la fonction reste continue par morceaux sur l'intervalle étudié et toujours "intégrable" (au sens que l'on semble percevoir ici).
  Ensuite, avec le peu que l'on a, essayons de réfléchir avec les fonctions en escalier. Étudions :
  $$u_n = \int_a^b \varphi_n(t)\mathrm{d}t. \tag{4.53}$$
  Étant donné que $\varphi_n(t)$ est une fonction continue par morceau, par définition 4.2.29, $c$ doit appartenir à un intervalle ouvert d'une subdivision (suffisamment fine) de $[a,b]$. $\varphi_n(t)$ évalué en $c$ est alors défini sur un intervalle fermé où la fonction est continue. Il suffit alors de montrer que l'ensemble se raccorde en $c$ afin d'obtenir la formule escomptée (vu que l'on est sur un fermé, tout roule ; et tant qu'on y est : vu que la fonction est continue, la limite à droite coïncide avec la limite à gauche).

13. Note un peu hors sujet mais : je me tâte de plus en plus à faire du calcul scientifique (peut-être pas forcément pour les bonnes raisons), il se pourrait donc que la suite de la partie prenne un tournant carrément plus "algorithmique".

Ainsi :

$$u_n = \int_a^c \varphi_n(t)\mathrm{d}t + \int_c^b \varphi_n(t) \tag{4.54}$$

il ne reste alors plus qu'à faire tendre $n$ vers l'infini ! □

**Remarque.** En utilisant l'intégration définie par des fonctions en escalier 4.2.22, la démonstration serait expéditive et encore plus claire.

Démontrer un tel résultat n'a qu'un but calculatoire. Il serait sans doute plus intéressant de concevoir $\int$ comme une sorte d'opérateur (ayant une sorte d'inverse, une sorte d'élément neutre, étant linéaire...)

-
-
-

**4.2.6.2.3 Bourbaki** Apparemment, Bourbaki se serait totalement loupé sur la manière d'introduire à l'intégration (d'autant plus que les considérations probabilistes semblent inexistantes dans ses ouvrages... du moins c'est ce que disent certains, juste dans l'introduction de [Bou07d] on trouve cela : "*nous verrons plus tard que la théorie de la mesure dans de tels produits joue un rôle important dans le Calcul des probabilités*" (il y a une quarantaine de références au mot "*probabilité*" sur les quatre autres livres, ce n'est pas non plus dément mais ce n'est pas rien non plus)). Pas la capacité (ni trop l'envie) de juger mais l'accueil ne semble clairement pas aussi unanime que pour le livre sur les espaces vectoriels topologiques.

Je ne vais rien dire, peut-être dans plusieurs années. Tout semble lourd, ce n'est pas ce que j'ai envie de voir aujourd'hui (au sens de ce mois ci, cette année là).

#### 4.2.6.3 Propriétés de l'intégrale de Riemann

#### 4.2.6.4 Déficiences de l'intégrale de Riemann

#### 4.2.6.5 Solutions ( ?) aux lacunes de l'intégrale de Riemann

#### 4.2.6.6 Table d'intégrales

Il y a bien la présentation de Milan [Mil17] qui est magnifique. Mais disons que j'ai trouvé plus complet : 

# Table élémentaire

# Formes basiques

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad n \neq -1 \tag{4.55}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| \tag{4.56}$$

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{4.57}$$

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| \tag{4.58}$$

# Intégrales de fonctions rationnelles

$$\int \frac{1}{(x+a)^2}dx = -\frac{1}{x+a} \tag{4.59}$$

$$\int (x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}, n \neq -1 \tag{4.60}$$

$$\int x(x+a)^n dx = \frac{(x+a)^{n+1}((n+1)x-a)}{(n+1)(n+2)} \tag{4.61}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1} x \tag{4.62}$$

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{4.63}$$

$$\int \frac{x}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln|a^2+x^2| \tag{4.64}$$

$$\int \frac{x^2}{a^2+x^2}dx = x - a\tan^{-1}\frac{x}{a} \tag{4.65}$$

$$\int \frac{x^3}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}a^2\ln|a^2+x^2| \tag{4.66}$$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{4.67}$$

$$\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}dx = \frac{1}{b-a}\ln\frac{a+x}{b+x},\ a \neq b \tag{4.68}$$

$$\int \frac{x}{(x+a)^2}dx = \frac{a}{a+x} + \ln|a+x| \tag{4.69}$$

$$\int \frac{x}{ax^2+bx+c}dx = \frac{1}{2a}\ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{a\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \tag{4.70}$$

# Intégrales avec des racines

$$\int \sqrt{x-a}\,dx = \frac{2}{3}(x-a)^{3/2} \tag{4.71}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x\pm a}}\,dx = 2\sqrt{x\pm a} \tag{4.72}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a-x}}\,dx = -2\sqrt{a-x} \tag{4.73}$$

$$\int x\sqrt{x-a}\,dx = \begin{cases} \frac{2a}{3}(x-a)^{3/2} + \frac{2}{5}(x-a)^{5/2},\ \text{or} \\ \frac{2}{3}x(x-a)^{3/2} - \frac{4}{15}(x-a)^{5/2},\ \text{or} \\ \frac{2}{15}(2a+3x)(x-a)^{3/2} \end{cases} \tag{4.74}$$

$$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \left(\frac{2b}{3a} + \frac{2x}{3}\right)\sqrt{ax+b} \tag{4.75}$$

$$\int (ax+b)^{3/2}\,dx = \frac{2}{5a}(ax+b)^{5/2} \tag{4.76}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x\pm a}}\,dx = \frac{2}{3}(x\mp 2a)\sqrt{x\pm a} \tag{4.77}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a-x}}\,dx = -\sqrt{x(a-x)} - a\tan^{-1}\frac{\sqrt{x(a-x)}}{x-a} \tag{4.78}$$

$$\int \sqrt{\frac{x}{a+x}}\,dx = \sqrt{x(a+x)} - a\ln\left[\sqrt{x}+\sqrt{x+a}\right] \tag{4.79}$$

$$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2}{15a^2}(-2b^2+abx+3a^2x^2)\sqrt{ax+b} \tag{4.80}$$

$$\int \sqrt{x(ax+b)}\,dx = \frac{1}{4a^{3/2}}\left[(2ax+b)\sqrt{ax(ax+b)} - b^2 \ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right|\right] \tag{4.81}$$

$$\int \sqrt{x^3(ax+b)}\,dx = \left[\frac{b}{12a} - \frac{b^2}{8a^2x} + \frac{x}{3}\right]\sqrt{x^3(ax+b)} + \frac{b^3}{8a^{5/2}} \ln\left|a\sqrt{x} + \sqrt{a(ax+b)}\right| \tag{4.82}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{4.83}$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \tag{4.84}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(x^2 \pm a^2\right)^{3/2} \tag{4.85}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{4.86}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \sin^{-1}\frac{x}{a} \tag{4.87}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \tag{4.88}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4.89}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 \pm a^2} \mp \frac{1}{2}a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| \tag{4.90}$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{b + 2ax}{4a}\sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a^{3/2}} \ln\left|2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx^+c)}\right| \tag{4.91}$$

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{ax^2 + bx + c}\,dx = \frac{1}{48a^{5/2}}\Big(&2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\left(-3b^2 + 2abx + 8a(c + ax^2)\right) \\ &+3(b^3 - 4abc)\ln\left|b + 2ax + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\right|\Big)\end{aligned} \tag{4.92}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln\left|2ax + b + 2\sqrt{a(ax^2 + bx + c)}\right| \tag{4.93}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} - \frac{b}{2a^{3/2}}\ln\left|2ax+b+2\sqrt{a(ax^2+bx+c)}\right| \tag{4.94}$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}} \tag{4.95}$$

# Intégrales avec des logarithmes

$$\int \ln ax\,dx = x\ln ax - x \tag{4.96}$$

$$\int x\ln x\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{x^2}{4} \tag{4.97}$$

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{x^3}{9} \tag{4.98}$$

$$\int x^n\ln x\,dx = x^{n+1}\left(\frac{\ln x}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}\right), \quad n \neq -1 \tag{4.99}$$

$$\int \frac{\ln ax}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln ax)^2 \tag{4.100}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \tag{4.101}$$

$$\int \ln(ax+b)\,dx = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x, a \neq 0 \tag{4.102}$$

$$\int \ln\left(x^2+a^2\right)\,dx = x\ln\left(x^2+a^2\right) + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} - 2x \tag{4.103}$$

$$\int \ln\left(x^2-a^2\right)\,dx = x\ln\left(x^2-a^2\right) + a\ln\frac{x+a}{x-a} - 2x \tag{4.104}$$

$$\int \ln\left(ax^2+bx+c\right)\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{4ac-b^2}\tan^{-1}\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} - 2x + \left(\frac{b}{2a}+x\right)\ln\left(ax^2+bx+c\right) \tag{4.105}$$

$$\int x\ln(ax+b)\,dx = \frac{bx}{2a} - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{b^2}{a^2}\right)\ln(ax+b) \tag{4.106}$$

$$\int x \ln\left(a^2 - b^2x^2\right)\,dx = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{a^2}{b^2}\right)\ln\left(a^2 - b^2x^2\right) \tag{4.107}$$

$$\int (\ln x)^2\,dx = 2x - 2x\ln x + x(\ln x)^2 \tag{4.108}$$

$$\int (\ln x)^3\,dx = -6x + x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x \tag{4.109}$$

$$\int x(\ln x)^2\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x \tag{4.110}$$

$$\int x^2(\ln x)^2\,dx = \frac{2x^3}{27} + \frac{1}{3}x^3(\ln x)^2 - \frac{2}{9}x^3\ln x \tag{4.111}$$

# Intégrales avec des exponentielles

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} \tag{4.112}$$

$$\int \sqrt{x}e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\sqrt{x}e^{ax} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}\operatorname{erf}\left(i\sqrt{ax}\right),\ \text{where } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt \tag{4.113}$$

$$\int xe^x\,dx = (x-1)e^x \tag{4.114}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)e^{ax} \tag{4.115}$$

$$\int x^2e^x\,dx = \left(x^2 - 2x + 2\right)e^x \tag{4.116}$$

$$\int x^2e^{ax}\,dx = \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)e^{ax} \tag{4.117}$$

$$\int x^3e^x\,dx = \left(x^3 - 3x^2 + 6x - 6\right)e^x \tag{4.118}$$

$$\int x^ne^{ax}\,dx = \frac{x^ne^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,\mathrm{d}x \tag{4.119}$$

$$\int x^ne^{ax}\,dx = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}\Gamma[1+n,-ax],\ \text{where } \Gamma(a,x) = \int_x^\infty t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \tag{4.120}$$

$$\int e^{ax^2}\, dx = -\frac{i\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(ix\sqrt{a}\right) \tag{4.121}$$

$$\int e^{-ax^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}\mathrm{erf}\left(x\sqrt{a}\right) \tag{4.122}$$

$$\int xe^{-ax^2}\, dx = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2} \tag{4.123}$$

$$\int x^2e^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a^3}}\mathrm{erf}(x\sqrt{a}) - \frac{x}{2a}e^{-ax^2} \tag{4.124}$$

# Intégrales de fonctions trigonométriques

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax \tag{4.125}$$

$$\int \sin^2 ax\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{4.126}$$

$$\int \sin^3 ax\, dx = -\frac{3\cos ax}{4a} + \frac{\cos 3ax}{12a} \tag{4.127}$$

$$\int \sin^n ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax\ \ {}_2F_1\left[\frac{1}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{3}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{4.128}$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax \tag{4.129}$$

$$\int \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} \tag{4.130}$$

$$\int \cos^3 ax dx = \frac{3\sin ax}{4a} + \frac{\sin 3ax}{12a} \tag{4.131}$$

$$\int \cos^p ax dx = -\frac{1}{a(1+p)}\cos^{1+p} ax \times {}_2F_1\left[\frac{1+p}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3+p}{2}, \cos^2 ax\right] \tag{4.132}$$

$$\int \cos x \sin x\, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + c_1 = -\frac{1}{2}\cos^2 x + c_2 = -\frac{1}{4}\cos 2x + c_3 \tag{4.133}$$

$$\int \cos ax \sin bx \, dx = \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)} - \frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)}, a \neq b \tag{4.134}$$

$$\int \sin^2 ax \cos bx \, dx = -\frac{\sin[(2a-b)x]}{4(2a-b)} + \frac{\sin bx}{2b} - \frac{\sin[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{4.135}$$

$$\int \sin^2 x \cos x \, dx = \frac{1}{3} \sin^3 x \tag{4.136}$$

$$\int \cos^2 ax \sin bx \, dx = \frac{\cos[(2a-b)x]}{4(2a-b)} - \frac{\cos bx}{2b} - \frac{\cos[(2a+b)x]}{4(2a+b)} \tag{4.137}$$

$$\int \cos^2 ax \sin ax \, dx = -\frac{1}{3a} \cos^3 ax \tag{4.138}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 bx dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2ax}{8a} - \frac{\sin[2(a-b)x]}{16(a-b)} + \frac{\sin 2bx}{8b} - \frac{\sin[2(a+b)x]}{16(a+b)} \tag{4.139}$$

$$\int \sin^2 ax \cos^2 ax \, dx = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4ax}{32a} \tag{4.140}$$

$$\int \tan ax \, dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax \tag{4.141}$$

$$\int \tan^2 ax \, dx = -x + \frac{1}{a} \tan ax \tag{4.142}$$

$$\int \tan^n ax \, dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{a(1+n)} \times {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}, 1, \frac{n+3}{2}, -\tan^2 ax\right) \tag{4.143}$$

$$\int \tan^3 ax dx = \frac{1}{a} \ln \cos ax + \frac{1}{2a} \sec^2 ax \tag{4.144}$$

$$\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| = 2 \tanh^{-1}\left(\tan \frac{x}{2}\right) \tag{4.145}$$

$$\int \sec^2 ax \, dx = \frac{1}{a} \tan ax \tag{4.146}$$

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| \tag{4.147}$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x \tag{4.148}$$

$$\int \sec^2 x \tan x \, dx = \frac{1}{2} \sec^2 x \tag{4.149}$$

$$\int \sec^n x \tan x \, dx = \frac{1}{n} \sec^n x, n \neq 0 \tag{4.150}$$

$$\int \csc x \, dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| = \ln |\csc x - \cot x| + C \tag{4.151}$$

$$\int \csc^2 ax \, dx = -\frac{1}{a} \cot ax \tag{4.152}$$

$$\int \csc^3 x \, dx = -\frac{1}{2} \cot x \csc x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| \tag{4.153}$$

$$\int \csc^n x \cot x \, dx = -\frac{1}{n} \csc^n x, n \neq 0 \tag{4.154}$$

$$\int \sec x \csc x \, dx = \ln |\tan x| \tag{4.155}$$

# Produits de fonctions trigonométriques et monômes

$$\int x \cos x \, dx = \cos x + x \sin x \tag{4.156}$$

$$\int x \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax \tag{4.157}$$

$$\int x^2 \cos x \, dx = 2x \cos x + \left(x^2 - 2\right) \sin x \tag{4.158}$$

$$\int x^2 \cos ax \, dx = \frac{2x \cos ax}{a^2} + \frac{a^2 x^2 - 2}{a^3} \sin ax \tag{4.159}$$

$$\int x^n \cos x dx = -\frac{1}{2}(i)^{n+1} \left[\Gamma(n+1, -ix) + (-1)^n \Gamma(n+1, ix)\right] \tag{4.160}$$

$$\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{2}(ia)^{1-n} \left[(-1)^n \Gamma(n+1, -iax) - \Gamma(n+1, ixa)\right] \tag{4.161}$$

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x + \sin x \tag{4.162}$$

$$\int x \sin ax \, dx = -\frac{x \cos ax}{a} + \frac{\sin ax}{a^2} \tag{4.163}$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = \left(2 - x^2\right) \cos x + 2x \sin x \tag{4.164}$$

$$\int x^2 \sin ax \, dx = \frac{2 - a^2 x^2}{a^3} \cos ax + \frac{2x \sin ax}{a^2} \tag{4.165}$$

$$\int x^n \sin x \, dx = -\frac{1}{2}(i)^n \left[\Gamma(n+1, -ix) - (-1)^n \Gamma(n+1, -ix)\right] \tag{4.166}$$

$$\int x \cos^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} + \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x \tag{4.167}$$

$$\int x \sin^2 x \, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{8} \cos 2x - \frac{1}{4} x \sin 2x \tag{4.168}$$

$$\int x \tan^2 x \, dx = -\frac{x^2}{2} + \ln \cos x + x \tan x \tag{4.169}$$

$$\int x \sec^2 x \, dx = \ln \cos x + x \tan x \tag{4.170}$$

# Produits de fonctions trigonométriques et exponentielle

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \tag{4.171}$$

$$\int e^{bx} \sin ax \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (b \sin ax - a \cos ax) \tag{4.172}$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) \tag{4.173}$$

$$\int e^{bx} \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{bx} (a \sin ax + b \cos ax) \tag{4.174}$$

$$\int xe^x \sin x \, dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x - x \cos x + x \sin x) \tag{4.175}$$

$$\int xe^x \cos x \, dx = \frac{1}{2} e^x (x \cos x - \sin x + x \sin x) \tag{4.176}$$

# Intégrales de fonctions hyperboliques

$$\int \cosh ax \, dx = \frac{1}{a} \sinh ax \tag{4.177}$$

$$\int e^{ax} \cosh bx \, dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [a \cosh bx - b \sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} + \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{4.178}$$

$$\int \sinh ax \, dx = \frac{1}{a} \cosh ax \tag{4.179}$$

$$\int e^{ax} \sinh bx \, dx = \begin{cases} \dfrac{e^{ax}}{a^2 - b^2} [-b \cosh bx + a \sinh bx] & a \neq b \\ \dfrac{e^{2ax}}{4a} - \dfrac{x}{2} & a = b \end{cases} \tag{4.180}$$

$$\int \tanh ax \, dx = \frac{1}{a} \ln \cosh ax \tag{4.181}$$

$$\int e^{ax} \tanh bx \, dx = \begin{cases} \dfrac{e^{(a+2b)x}}{(a+2b)} {}_2F_1 \left[ 1 + \dfrac{a}{2b}, 1, 2 + \dfrac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] \\ \qquad - \dfrac{1}{a} e^{ax} {}_2F_1 \left[ 1, \dfrac{a}{2b}, 1 + \dfrac{a}{2b}, -e^{2bx} \right] & a \neq b \\ \dfrac{e^{ax} - 2 \tan^{-1}[e^{ax}]}{a} & a = b \end{cases} \tag{4.182}$$

$$\int \cos ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [a \sin ax \cosh bx + b \cos ax \sinh bx] \tag{4.183}$$

$$\int \cos ax \sinh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cos ax \cosh bx + a \sin ax \sinh bx] \tag{4.184}$$

$$\int \sin ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [-a \cos ax \cosh bx + b \sin ax \sinh bx] \tag{4.185}$$

$$\int \sin ax \sinh bx \, dx = \frac{1}{a^2 + b^2} [b \cosh bx \sin ax - a \cos ax \sinh bx] \tag{4.186}$$

$$\int \sinh ax \cosh ax dx = \frac{1}{4a} \left[ -2ax + \sinh 2ax \right] \tag{4.187}$$

$$\int \sinh ax \cosh bx \, dx = \frac{1}{b^2 - a^2} \left[ b \cosh bx \sinh ax - a \cosh ax \sinh bx \right] \tag{4.188}$$

### 4.2.7 Équations différentielles

### 4.2.8 Convexité et concavité

### 4.2.9 Approximation et optimisation

## 4.3 Objets probabilistes

### 4.3.1 Généralités, probabilités conditionnelles et indépendance

### 4.3.2 Variables aléatoires réelles dans un univers fini

### 4.3.3 Loi des grands nombres

## 4.4 Objets arithmétiques

### 4.4.1 Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

### 4.4.2 Congruences

### 4.4.3 Quelques éléments d'arithmétique élémentaire

### 4.4.4 Combinatoire et dénombrement

## 4.5 Introduction aux matrices (sans l'algèbre linéaire)

Malheureusement, on ne fait pas d'algèbre linéaire ici... Par exemple, on ne va pas pouvoir introduire une matrice comme le fait Godement [God69] par exemple :

**Définition 4.5.1** (Godement, § 12)**.** Soit

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1q} & \cdots & \alpha_{pq} \end{pmatrix} \tag{4.189}$$

Un tableau de la forme (4.189) s'appelle une **matrice à $p$ colonnes et $q$ lignes à coefficients dans l'anneau** $K$ (les $\alpha_{ij}$ s'appellent aussi les **termes** de la matrice en question), et on dit que (4.189) est la **matrice de l'homomorphisme $f$ par rapport à la base** $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ **de** $L$ **et à la base** $(b_i)_{1\leqslant j\leqslant q}$ **de** $M$. La notion de matrice joue pour les homomorphismes un rôle analogue à celui que joue, pour les vecteurs, la notion de coordonnées.

Pour nous les matrices seront essentiellement des **tableaux de nombres remplis par des coefficients et possédant certaines opérations (addition, multiplication...)** [14]. En enlevant toutes les références à l'algèbre linéaire (à proprement dit), d'un côté on se décharge d'un poids et d'une (fausse) lourdeur mais de l'autre on perd une réelle puissance de frappe et de conception de l'objet (à vrai dire, même si on a rapidement parlé de la notion de groupe précédemment, ce n'est pas en Terminale (ni même en spécialité) que l'on se voit introduire les $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$... Il faudra proprement revenir sur cela plus tard !)

À dessein (pour plus tard), je vais donner la définition et la petite (petite) introduction (rapide) aux matrices chez Colmez [Col11] :

**Définition 4.5.2** (Colmez, Matrices à coefficients dans un corps)**.** Soit $\mathbf{K}$ un corps commutatif. Si $n$, $m$ sont des entiers $\geqslant 1$, on note $\mathbf{M}_{n\times m}(\mathbf{K})$ l'ensemble des *matrices* $A = (a_{i,j})_{i\leqslant n, j\leqslant m}$ à $n$ lignes et $m$ colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$ (i.e. $a_{i,j} \in \mathbf{K}$ pour tous $i, j$). Pour les calculs, il est souvent commode de représenter $A = (a_{i,j})_{i\leqslant n, j\leqslant m}$ (notée simplement $(a_{i,j})$, si $n$ et $m$ sont clairs) sous la forme d'un tableau $n \times m$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \tag{4.190}$$

L'ensemble $\mathbf{M}_{n\times m}(\mathbf{K})$ des matrices $n \times m$ est, de manière naturelle, un espace vectoriel avec l'addition et la multiplication par un scalaire définies composante par composante :

$$(a_{i,j})_{i\leqslant n, j\leqslant m} + (b_{i,j})_{i\leqslant n, j\leqslant m} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{i\leqslant n, j\leqslant m} \text{ et } \lambda(a_{i,j})_{i\leqslant n, j\leqslant m} = (\lambda a_{i,j})_{i\leqslant n, j\leqslant m} \tag{4.191}$$

*Et ensuite : quelques mots sur la dimension de $\boldsymbol{M}_{n\times m}(\boldsymbol{K})$ ainsi que sur un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\boldsymbol{M}_{n\times m}(\boldsymbol{K})$ et Hom$(\boldsymbol{K}^m, \boldsymbol{K}^n)$. Malheureusement, pas de tout ça pour nous pour l'instant !*

14. Aussi naturel qu'une telle idée puisse paraître, je me demande bien combien de personnes y avaient pensé avant qu'on leur introduise. Et, pis encore, combien de gens (en particulier chez les spécialités) ont tilté qu'un nombre était une matrice $1 \times 1$.

Pour la structure globale de cette sous-partie, vu que ce n'est qu'une introduction "à la volée" (sans algèbre linéaire ; sans algèbre "du tout" même), je vais essentiellement reprendre mon cours de spécialité mathématiques. Je vais l'agrémenter de quelques parties qui sortent un peu du cadre de spécialité (mais très peu). Je suis par exemple allé zieuter dans le Gourdon d'Algèbre [Gou21] pour dénicher deux trois idées (rien de folichon ; le niveau est pour l'instant trop relevé pour l'utiliser).

### 4.5.1 Généralités

On ne va pas faire une introduction aux matrices mais plus une introduction au calcul matriciel. Sans algèbre linéaire, mis à part faire de la modélisation pour les enfants ainsi que quelques calculs, on ne va pas aller bien loin ! Malheureusement, conceptuellement, on ne tire pas grand chose d'un tel module. Il n'y a bien que la partie sur les résolutions de systèmes linéaires qui peut étonner... et encore, une fois que l'on a compris la chose, on applique bêtement mais on n'a guère plus de frisson que lorsque l'on résolvait nos premières équations linéaires à l'école primaire et au collège.

Perdu pour perdu, on va essayer de faire du pur calcul. Il n'y a pas grand chose à comprendre. Néanmoins, je vais essayer de parsemer le contenu de mon cours de terminale de quelques remarques qui pourraient donner du fond à la forme.

#### 4.5.1.1 Définition

**Définition 4.5.3** (Matrice, spécialité Math)**.** Une **matrice de taille** $(n, p)$ est un tableau de nombres à $n$ lignes et $p$ colonnes.
Les nombres qui composent une matrice sont appelés les **coefficients de la matrice**, on les note $a_{ij}$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{4.192}$$

C'est bon, je commence à maîtriser cette histoire de ligne et colonne. Même si encore aujourd'hui j'ai tendance à confondre ligne / colonne ; horizontal / vertical ; droite / gauche... Je suis bien dans le beau drap si Godement et ma prof font les choses à l'envers l'un de l'autre ! Bref...

Avant de manipuler concrètement des matrices, une opération fondamentale s'impose à nous : celle de l'égalité entre deux matrices :

**Définition 4.5.4** (Égalité entre deux matrices)**.** Deux matrices $A$ et $B$ sont dites égales **si et seulement si** elles ont la même taille et tous les coefficients sont égaux.

Autrement dit : $A = B \iff \forall (i,j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ l\leqslant j\leqslant p}}$ on a $a_{ij} = b_{ij}$, où $a_{ij}$ désignent les coefficients de la matrice $A$ et $b_{ij}$ ceux de la matrice $B$. Les matrices $A$ et $B$ ayant une taille identique.

Lorsque l'on manipule des matrices, il existe des "types" bien spécifiques qui apparaissent fréquemment :

**Définition 4.5.5** (Matrice carrée)**.** On appelle **matrice carrée** une matrice qui a autant de lignes que de colonnes, c'est-à-dire que $n = p$.

Si on ne fait pas de la "géométrie déguisée" (produit scalaire, vecteur... ; et encore...), on a guère peu de chance de trouver autre chose que des matrices carrées. De plus, généralement, les opérations (un peu spécifiques) dont on va parler plus tard sont typiquement définies pour des matrices carrées. On conçoit alors parfaitement bien l'importance d'un tel type de matrice.

**Définition 4.5.6** (Matrice ligne, vecteur ligne)**.** Une **matrice ligne** (également appelée vecteur ligne) est une matrice ne contenant qu'une seule ligne, c'est-à-dire que $n = 1$.

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix} \tag{4.193}$$

Aux vues de la manière dont est définie la multiplication (entre matrices), en l'espèce, si l'on ne possédait que la notion de matrice ligne... on serait vite limité. C'est pourquoi, tout naturellement, on définit ce qu'est une matrice colonne.

**Définition 4.5.7** (Matrice colonne, vecteur colonne)**.** Une **matrice colonne** (également appelée vecteur colonne) est une matrice ne contenant qu'une seule colonne, c'est-à-dire que $p = 1$.

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} \tag{4.194}$$

Wooow, nous retrouvons l'écriture (adoptée "dès" la seconde) des vecteurs. Effectivement, un vecteur est un type bien particulier de matrice. Donc, première remarque, est-ce que ce que l'on pouvait faire avec les vecteurs (notamment en géométrie) se généralise au cas des matrices ? Oh que oui ! Même si les matrices sont introduites si tard, sans le dire (voire même de manière carrément explicite dans des sous-parties précédentes que je n'ai pas encore écrite à l'heure actuelle) on a déjà manipulé plein de matrices ! Mais pour l'instant on est que dans du calcul matriciel : un mode bien commode de calculer des choses. On est encore loin d'avoir utilisé rien qu'un bout de la puissance d'un tel objet (qui peut lui même se généraliser fort bien et fort loin) !

**Définition 4.5.8** (Matrice nulle)**.** La **matrice nulle** est une matrice dont tous les coefficients sont nuls (égaux à $0$).

**Remarque.** On ne requiert aucune dimension sur la taille (la dimension) d'une matrice nulle. Elle peut être carrée ou pas ! Toutefois, à l'avenir, on notera les matrices nulles carrées de taille $n$ : $0_n$.

**Définition 4.5.9** (Matrice diagonale)**.** Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous ses coefficients sont nuls exceptés ceux situés sur la diagonale.

**Remarque.** Par commodité, que la matrice soit carrée ou pas, on pourra noter $\mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$ la matrice diagonale de l'exemple suivant (où $n$ est fixé à $4$).

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \tag{4.195}$$

Une telle matrice paraît bien inoffensive ! On s'en servira plus qu'on ne le pense. Il existe par ailleurs un cas bien particulier de matrice diagonale : la matrice identité. De plus, il existe d'autres cas de matrices définies par le rapport entre ses éléments et la diagonale.

**Définition 4.5.10** (Matrice identité)**.** La **matrice identité d'ordre** $n$, notée $I_n$ voire $\mathrm{Id}_n$, est la matrice diagonale dont tous ses coefficients sont égaux à $1$.

**Exemple.**

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1) \tag{4.196}$$

**Définition 4.5.11** (Matrice triangulaire supérieure et inférieure)**.** Une **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) est une matrice dont tous les coefficients en dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls. Formellement, les coefficients d'une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) vérifient : pour tous $(i, j)$ tels que $i > j, a_{ij} = 0$ (resp. pour tous $(i, j)$ tels que $i < j, a_{ij} = 0$).

**Exemple** (Matrice triangulaire supérieure)**.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{pmatrix} \tag{4.197}$$

**Exemple** (Matrice triangulaire inférieure)**.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{4.198}$$

Étant donné que l'on a pour l'instant défini aucune opération sur les matrices, on ne peut guère voir beaucoup d'autres "types" de matrice (symétrique, hermitienne, orthogonale, unitaire...) [15].

#### 4.5.1.2 Opérations

**4.5.1.2.1 Addition** Additionner est une chose courante. Une fois que l'on a saisi le "truc", on peut se débrouiller à l'infini. Toutefois, comment "généraliser" cela ? En particulier dans le cas d'une matrice ! On peut se dire que l'on va faire naturellement les choses : prenant deux matrices de tailles identiques, y'a plus qu'à ! On additionne bêtement coefficient à coefficient ! Y a-t'il ne serait-ce qu'une raison ? En effet, si l'on appliquait ce raisonnement pour la multiplication, on se trouverait bien embêté à multiplier "terme à terme " [16]... (comme on le verra, le produit de matrice est défini d'une manière quelque peu déroutante aux premiers égards).

Y a-t'il un lien entre addition et multiplication (*produit*) ? Un lien relativement similaire à celui que l'on est habitué à trouver (dans $\mathbb{N}$ par exemple) (cf. équation ci-dessous) ?

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{\mathbf{n} \text{ fois}} = 1 \cdot \mathbf{n} \tag{4.199}$$

Malheureusement, il n'est pas vraiment le temps de se poser mille et une questions. Acceptons *pour l'instant* que les choses soient ainsi ! (Même si c'est triste à dire...)

**Définition 4.5.12** (Somme de deux matrices)**.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de tailles identiques $(n, p)$. La matrice $C = A + B$ est la matrice constituée des coefficients définis ci-après : pour tous $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \tag{4.200}$$

Qu'est-ce que cela nous apprend ? Pas franchement grand chose ! L'addition matricielle se comporte "componentwise" essentiellement comme l'addition usuelle, classique. Donc, assez logiquement (bien que l'on ait pas "créé" quelque chose de tout nouveau), on récupère les propriétés de l'addition classique : à savoir, associativité, commutativité...

**Proposition 4.5.13** (Principales propriétés)**.** Sachant que l'addition usuellement définies sur un "ensemble de nombre" [a] est **commutative**, **associative** et "possède" un **élément absorbant** : il en est de même pour l'addition matricielle.

*a.* Il conviendrait de mieux cerner cette notion, quoique vue précédemment, elle reste ouverte à débat pour nous.

**Démonstration.** On ne donne qu'une idée de preuve, les détails étant surtout formels. Il convient simplement de se rendre compte que l'addition est définie terme à terme (cf. 4.200). De fait, la propriété se transporte naturellement aux matrices. (On pourrait

15. Voir de telles matrices n'aurait d'ailleurs que fort peu de sens à ce stade.
16. Il existe néanmoins ce que l'on appelle le *produit matriciel d'Hadamard*, on ne détaille néanmoins pas (ici ; beaucoup trop tôt ; néanmoins, par rapport au produit matriciel que nous verrons tout à l'heure, en utilisant le produit matriciel d'Hadamard : on conserve la commutativité !). Il faudrait faire de l'algèbre linéaire pour y voir plus clair !

raisonner dans l'autre sens en voyant une matrice (somme de deux autres matrices) de taille $(n,p)$ comme $np$ additions à effectuer. Et, logiquement (dans ce cas là), ce qui est vrai localement demeure vrai globalement : l'addition terme à terme étant commutative, associative [...], il en sera de même pour l'addition matricielle. Elle sera effectivement commutative, associative [...].) Oh et puis merde, faisons les détails (au moins pour la commutative).

Soit $A$ et $B$ deux matrices compatibles pour l'addition (dénotons leur taille par $(n,p)$). On va chercher à montrer que la somme matricielle est commutative (c'est-à-dire que $A+B=B+A$). Appliquons simplement la définition 4.5.12 à l'addition de la matrice $B$ à la matrice $A$ :

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} \tag{4.201}$$

On constate, sans beaucoup de surprise, que c'est égal à :

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1p}+b_{1p} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2p}+b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \tag{4.202}$$

Ce qui est identique (par définition de l'addition usuelle) à :

$$\begin{pmatrix} b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1p}+a_{1p} \\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2p}+a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}+a_{n1} & \cdots & \cdots & b_{np}+a_{np} \end{pmatrix} \tag{4.203}$$

En fin de compte, cela se ramène à :

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}=B+A \tag{4.204}$$

Donc : $A+B=B+A$. Wow. □

**Remarque.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois matrices (compatibles pour l'addition) et $0_{np}$ la matrice nulle de taille $(n,p)$. On a donc :

$$A+B=B+A \tag{4.205}$$

$$A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C \tag{4.206}$$

$$0_{np}+A=A \tag{4.207}$$

Comme pour l'addition usuelle, la somme a son pendant : la différence.

**Définition 4.5.14** (Différence de deux matrices)**.** La différence de deux matrices $A$ et $B$ (compatibles pour l'addition), notée $A - B$, est définie par $A - B := A + (-B)$.

**Remarque.** Néanmoins, à l'heure actuelle, nous ne pouvons pas décemment utiliser un tel résultat ! On trouve un signe moins devant le $B$, ce qui, implicitement, revient à une multiplication par moins un ! Or, nous n'avons pas défini le produit d'une matrice par un réel ! C'est ce que nous allons faire tout de suite.

**4.5.1.2.2 Produit par un réel** On commence tout doux doucement à entrer dans des choses un poil plus intéressantes ! Mais, comme pour l'addition, pour l'instant pas franchement quoi que ce soit de nouveau sous le soleil (**et c'est sans doute à partir de là que l'on commence à comprendre que la manière "naturelle" de définir la multiplication pour les matrices (c'est-à-dire *componentwise*) risque de ne pas marcher**).

À vrai dire, on se retrouve un peu contraint dans notre démarche !

**Remarque.** N'oublions pas qu'une multiplication est une addition dissimulée ! À cet égard, $A + A = 2 \cdot A$. Si l'on regarde "le comportement des coefficients" lorsque l'on fait une telle opération, évidemment, on remarque que tout se fait "componentwise". Plus généralement, pour $k$ un entier naturel et $A$ une matrice, on a :

$$\underbrace{A + A + \cdots + A}_{\text{k fois}} = k \cdot A \tag{4.208}$$

La question qui reste à se poser étant : et si $k$ est un réel, obtient-on un résultat similaire dans l'esprit ? (Aller voir ce que fait Tao [Tao20] (avec les suites de Cauchy). (En théorie, c'est une question qui a été traitée précédemment (mais pour les scalaires).))

Je reconnais que je suis allé un peu vite en besogne dans ma remarque ("$A + A = 2 \cdot A$"). J'ai court-circuité la chaîne de raisonnement. Néanmoins, sur l'intuition, c'est ça. Et, franchement, dans cette partie introductive, on ne cherche pas franchement tellement plus que de l'intuition (sentir l'objet, la manière de l'amener, la manière dont il est construit et ce que l'on pourrait potentiellement en faire).

**Définition 4.5.15.** Le produit d'une matrice $A$ par un réel $k$ (noté $k \cdot A$ et abrégé $kA$) est la matrice dont les coefficients sont obtenus en multipliant ceux de $A$ par $k$. En d'autres termes, en notant $a_{ij}$ les coefficients de $A$ : pour tous $i$ et $j$ tels que $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$, on a :

$$(kA)_{ij} = ka_{ij} \tag{4.209}$$

**Exemple.**

$$-\pi \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi a_{11} & -\pi a_{12} \\ -\pi a_{21} & -\pi a_{22} \end{pmatrix} \tag{4.210}$$

Immédiatement, un certain nombre de propriétés basiques en découlent :

**Proposition 4.5.16.** Soient $A$ et $B$ deux matrices de même taille, $0$ la matrice nulle et deux réels $k$ et $k'$. Alors :

— $k(A+B) = kA + kB$ ;

— $(k+k')A = kA + k'A$ ;

— $k(k'A) = kk'A = k'kA = (kk')A$ ;

— $1A = A$ ;

— $0A = 0$ ; et,

— $A + (-A) = 0$.

**4.5.1.2.3 Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne** Jusque là, on a été relativement épargné par les problèmes de "compatibilité" entre matrices (sous-entendu quand on tente de faire une opération entre elles). Jusqu'alors, on a jamais franchement requis plus que la condition suivante : les deux matrices doivent être de même taille. Enfin si ! À vrai dire, on a déjà demandé un petit peu plus sans vraiment le dire ! Dans la dernière section, on fait le produit d'une matrice de taille quelconque par un réel. Or, qu'est-ce qu'un réel ? Rien de moins qu'une matrice de taille $(1, 1)$. En somme, on a multiplié une matrice $(1, 1)$ avec une matrice $(n, p)$. Or, on le verra plus tard, mais : pour parler, en "toute généralité", de compatibilité du produit entre deux matrices : on requiert que leurs dimensions soient compatibles, c'est-à-dire de taille $(n, p)$ pour l'une et $(p, q)$ pour l'autre. Il y a ce $p$ en commun !

Donc, on a une petite subtilité (?) en ce qui concerne les scalaires. Désormais, raisonnons sur les vecteurs : les **matrices lignes** et les **matrices colonnes**.

**Définition 4.5.17.** Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les éléments d'un vecteur ligne $A$ de taille $(1, n)$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ les éléments d'un vecteur colonne $B$ de taille $(n, 1)$. Alors, on définit le produit entre $A$ et $B$, noté $AB$, tel que :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \tag{4.211}$$

**Remarque.** Attention, il ne faut pas faire la bêtise que je viens de faire ! Il faut veiller précautionneusement à respecter les hypothèses. J'ai cru que cette formule n'était pas cohérente avec celle précédemment vu concernant le produit d'une matrice par un réel. Je me suis dit, eh bien, supposons désormais $A$ de taille $(1, 1)$. Et j'ai bêtement appliqué la formule pour obtenir :

$$a \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \overset{?}{=} ab_1 + ab_2 + \cdots + ab_n = \sum_{i=1}^{n} ab_i = a \sum_{i=1}^{n} b_i \tag{4.212}$$

Or ! Faire cela revient à oublier la nature de $n$. En effet, $n$ est une variable de l'énoncé. Si l'on fixe sa valeur en un endroit, il faut la fixer partout ailleurs (avec une valeur strictement identique ou équivalente). Attention à cet écueil donc ! Mais d'un autre côté, il ne faut pas en déduire que la formule de multiplication d'une matrice par un réel est fausse. Ce ne sont simplement pas les mêmes conditions qui s'appliquent. Les deux énoncés ne nous parlent pas exactement des mêmes choses, des mêmes cas.

Notons que la matrice obtenue est de taille $(1,1)$, c'est donc un scalaire. Voici un petit indice terminologique qui peut nous faire penser au **produit scalaire**! Évidemment qu'il y a un lien! Regardons les cas des dimensions 2 et 3 :

**Exemple** (Dimension 2)**.**

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = \sum_{i=1}^{2} a_i b_i \tag{4.213}$$

**Exemple** (Dimension 3)**.**

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i \tag{4.214}$$

**Remarque.** Attention à l'ordre! La nécessité de la compatibilité dimensionnelle se ressent sur l'ordre des opérations (et plus globalement sur l'ordre de multiplication). Ainsi, le produit suivant est mal défini (tout du moins, en ce qui concerne la définition 4.5.17) :

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \tag{4.215}$$

En effet, on multiplie une matrice $(n,1)$ par une matrice $(1,n)$. Formellement, cela ne respecte pas la définition 4.5.17. Mais est-ce véritablement un problème? Oui et non. Non car on peut se débrouiller pour définir cela. Oui car on vient de découvrir la **non commutativité** et que ça va tout de suite compliquer le bins.
Attendons encore un peu pour pouvoir définir véritablement ledit produit. (Surprise : ça va donner une matrice $(n,n)$.)

#### 4.5.1.2.4 Produit d'une matrice par une matrice colonne

C'est notre dernier pas avant de pouvoir définir en toute généralité le produit entre deux matrices (compatibles).

**Définition 4.5.18.** Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ les éléments d'une matrice $A$ de taille $(n,p)$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ les éléments d'un vecteur colonne $B$ de taille $(p,1)$. Alors, on définit le produit entre $A$ et $B$, noté $AB$, tel que :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 + \cdots + a_{1p}b_p \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 + \cdots + a_{2p}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + a_{n2}b_2 + \cdots + a_{np}b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}b_k \\ \sum_{k=1}^{p} a_{2k}b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk}b_k \end{pmatrix} \tag{4.216}$$

Intuitivement, la manière de procéder pour multiplier deux telles matrices est dans la "droite lignée" de ce que l'on a fait au paragraphe précédent (c'est "comme" si pour chaque ligne on avait calculé un produit scalaire (en dimension $n$)).

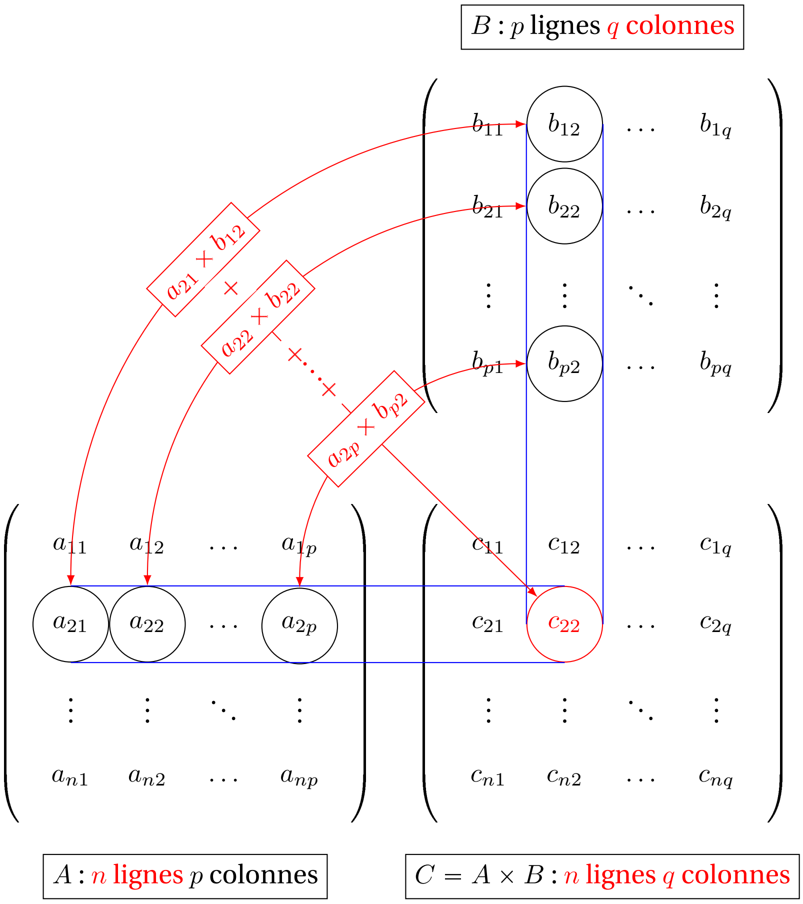
**4.5.1.2.5 Multiplication, produit de deux matrices** C'est plus franchement la joie ! Comment concevoir globalement les choses désormais ?! Plusieurs questions se posent à nous. Même si... franchement, en soulevant deux trois idées, les choses devraient apparaître sans trop d'encombre.

Dans la première partie sur l'addition, on était un peu embêté dans la simple mesure où (à vue de nez) la manière de généraliser aux matrices addition et produit semblait quelque peu nous dépasser. Pour mieux comprendre et approcher le concept de la manière la moins "étrange" possible, on a simplement eu à décomposer la manière de multiplier deux matrices en fonction des tailles des matrices. Un argument de compatibilité (sur la dimension) a particulièrement retenu notre attention.

**Définition 4.5.19.** Soient $n, p$ et $q$ trois entiers strictement positifs. Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ les éléments d'une matrice $A$ de taille $(n,p)$ et $(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ les éléments d'une matrice $B$ de taille $(p,q)$. Alors, on définit le produit $C$ entre $A$ et $B$, noté $C = AB$, tel que $C$ soit de dimension $(n,q)$ et chacun de ses coefficients $c_{ij}$ est défini tel que :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \tag{4.217}$$

Schématiquement, voici comment on obtient chacun des coefficients $c_{ij}$ (ici, $c_{22}$) :




Dans l'idée, lorsque l'on regardait le produit d'une matrice par une matrice colonne, on avait émis l'hypothèse que c'était *"comme" si pour chaque ligne on avait calculé un produit scalaire*. Désormais, lorsque l'on multiples entre elles deux matrices quelconques compatibles, "on va" *juste* calculer plein de produits scalaires dans tous les sens. (Est-ce à dire qu'un coefficient de la matrice produit ainsi obtenue correspond (par exemple) à la mesure d'un certain angle entre deux vecteurs ? Oui, entre la $i$-ième ligne et la $j$-ième colonne obtenues.)

C'est la libération !!! On peut enfin multiplier des choses entre elles, ouf! Mais c'est maintenant que les choses se corsent. On a esquissé le sujet plus tôt : des subtilités viennent se frayer un passage et un petit peu déstabiliser nos sens solidement acquis et habitués aux règles traditionnelles de calculs avec des réels ou complexes.

**4.5.1.2.5.1 Non commutativité** La multiplication des matrices n'est (en général) **pas commutative**. Cela signifie que $AB$ n'a pas vraiment de raison d'être égal à $BA$, en général. Mais est-ce souvent le cas ? On peut être en droit de se poser la question : mais diable, quand est-ce que deux matrices commutent ? (On pourrait sans doute raisonner de manière pas trop bourine avec de l'algèbre linéaire.) On pourrait se lancer dans des calculs qui ne nous apporteraient pas franchement grand chose d'autre que : bah, faut faire le calcul en fin de compte, il faut vérifier si $AB = BA$ ou pas. Le problème, face à ce genre de question est que : si l'on fait des calculs, on aura du mal à se rattacher à des résultats pré-existants (et permettant de donner de la perspective) pour la simple et bonne raison que l'on en a pas!

Par exemple, chercher du côté d'histoire de diagonalisation, étudier avec de bons objets le centre[17] $\mathcal{Z}(G)$ de certains groupes $G$ de matrice... Bref, ça nous emmerde.

*De manière dégénéré*, l'aspect non commutatif peut survenir de manière un peu étonnante : n'oublions pas les problèmes de dimension ! En toute généralité, on a vu dans la définition 4.5.19 que la dimension des matrices $A$ et $B$ devait être respectivement $(n, p)$ et $(p, q)$. Ainsi, l'on peut très bien faire le produit $AB$. Mais peut-on nécessairement faire le produit $BA$ ? Si l'on regarde tout d'abord, la dimension : on ferait le produit d'une matrice $(p, q)$ avec une matrice $(n, p)$. Aïe. Problème. À un jeu de réécriture près, du simple sucre syntaxique, en appliquant la condition sur la dimension de la définition 4.5.19 on requerrait que : $q = n$. Or, en général, ça n'a pas franchement de raisons de l'être. Donc, d'un côté : $AB$ est bien défini mais $BA$ n'a aucune raison d'être.

Peut-être qu'un dernier exemple montrant l'importance de la commutativité peut s'avérer utile. Dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a pu s'habituer à la formule du **binôme de Newton**. Prenons en désormais garde ! Fondamentalement, la formule du binôme de Newton encode la manière d'élever à une puissance la somme de deux "nombres". (Il existe des généralisations, mais passons. Nous ne verrons que celle portant sur les matrices.) Par exemple, pour $a$ et $b$ deux nombres complexes :

**Exemple.**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \tag{4.218}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \tag{4.219}$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \tag{4.220}$$

Or, en regroupant certains termes, on "commet" implicitement une chose (généralement) impensable chez les matrices : on postule que le produit commute. En effet, prenons l'exemple d'une élévation à la puissance 2 (il se passe exactement les mêmes choses pour des puissances supérieures) : $(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$. Regrouper les $ab$ et $ba$ en $2ab$ revient évidemment à supposer que le produit commute. Aucun problème pour les complexes ! En revanche, c'est une autre paire de manche pour les matrices.

Il faut en comprendre par là que : soient $A$ et $B$ deux matrices, alors : $(A + B)^2 = AA + AB + BA + BB$ (par commodité, de la même manière que pour les scalaires, on notera les puissances $A^k$). Ce qui revient à $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$. Peut-on aller plus loin ? En règle générale non. Pour continuer le calcul et trouver que $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, on requiert que $A$ et $B$ commutent. Plus généralement :

17. Le centre d'un groupe n'est autre que "l'ensemble" des éléments du groupe commutant. (Attention au vocabulaire, c'est "plus" qu'un ensemble.)

**Proposition 4.5.20** (Binôme de Newton matriciel)**.** Soient $A$ et $B$ deux matrices commutatives compatibles pour le produit. Alors :

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} \tag{4.221}$$

**Démonstration.** La démonstration n'a franchement rien à envier à celle dans le cas des "nombres" / des scalaires. Une récurrence et ça dégage. (Il serait intéressant de chercher d'autres démonstrations (typiquement une combinatoire ou d'autres plus "exotiques".) □

**Corollaire 4.5.21** (sous les hypothèses de la proposition **??**)**.** Étant donné que la somme de deux matrices est toujours commutative, on a que : $(A+B)^n = (B+A)^n$, ce qui revient à :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = (A+B)^n = (B+A)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k A^{n-k} \tag{4.222}$$

Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{n-k} B^k \tag{4.223}$$

Ce corollaire 4.5.21, qui est en fait simplement un jeu d'écriture, peut constituer un petit tour de passe passe si on s'y prend bien.

Toutefois, on met un détail sous le tapis : est-ce que si $A$ et $B$ commutent, alors des puissances quelconques de $A$ et $B$ vont-elles également commuter ? Eh hop :

**Proposition 4.5.22.** Si $A$ et $B$ sont deux matrices (compatibles pour le produit) commutant, alors $A^m$ et $B^n$ commutent également pour des entiers naturels $m$ et $n$ quelconques.

**Démonstration.**

$$A^m B^n = A^{m-1}\mathbf{A}\,\mathbf{B}B^{n-1} = A^{m-1}\mathbf{B}\,\mathbf{A}B^{n-1} = A^{m-2}\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{A}\,\mathbf{B}B^{n-2} = \cdots = B^n A^m \tag{4.224}$$

(Peut-être faire une double récurrence pour que ce soit plus "propre".) □

**4.5.1.2.5.2 Propriétés du produit** On va évidemment retrouve l'associativité ou la distributivité ou la présence d'un élément absorbant et d'un élément neutre. Néanmoins, comme le présente le paragraphe précédent : en toute généralité, deux matrices ne commutent pas. On va également trouver quelques petites subtilités, quelques méfiances que l'on devra avoir.

**Proposition 4.5.23.** Soient $A$, $B$ et $C$ des matrices (compatibles entre elles pour le produit) et $k$ un nombre réel (voire même complexe). Alors :

— $A(BC) = (AB)C = ABC$ ;

— $A(B+C) = AB + AC$ ; et,

— $A(kB) = k(AB) = kAB$.

**Démonstration.** Encore une fois, rien de fondamentalement très intéressant dans la démonstration. C'est juste un bête jeu de vérification sur les coefficients. Par exemple, pour la deuxième proposition :

Soient $n, p$ et $q$ trois entiers strictement positifs. Soient $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ les éléments d'une matrice $A$ de taille $(n,p)$ et $(b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ et $(c_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant q}}$ les éléments des matrice $B$ et $C$ de taille $(p,q)$.

On remarque tout d'abord que, conformément à la définition de l'addition entre deux matrices 4.5.12, l'addition de $B$ et $C$ est possible (car ayant toutes deux la même dimension). Et maintenant, comme des bourrins, on calcule juste :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1q} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & \cdots & \cdots & c_{pq} \end{pmatrix} \right] \tag{4.225}$$

Étant donné que l'on ne peut pas utiliser la distributivité (car c'est ce que l'on veut démontrer), on ne peut faire qu'une seule et unique chose : calculer la somme et ensuite faire le produit de la matrice $A$ avec la matrice conséquente de la somme entre $B$ et $C$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & \cdots & b_{1q}+c_{1q} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} & \cdots & b_{2q}+c_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1}+c_{p1} & \cdots & \cdots & b_{pq}+c_{pq} \end{pmatrix} \tag{4.226}$$

Grâce à la définition 4.5.19, on connaît la forme de chacun des coefficients de $A(B+C)$. Ces derniers sont :

$$\mu_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\Big[(b+c)_{kj}\Big] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\Big[b_{kj} + c_{kj}\Big] = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} + a_{ik}c_{kj} \tag{4.227}$$

La dernière égalité est vraie pour la simple et bonne raison que la propriété de distributivité est vérifiée pour les nombres usuels / les scalaires. (Tiens tiens tiens... c'est étonnant héhé.)

$$\mu_{ij} = \underbrace{\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}}_{\text{coefficient } (ab)_{ij}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{p} a_{ik}c_{kj}}_{\text{coefficient } (ac)_{ij}} \tag{4.228}$$

dû à l'associativité de l'addition (définie sur les scalaires).

On remarque alors, conformément à la définition 4.5.19, que les coefficients $\mu_{ij}$ résultent de la somme de deux produits matriciels ; et, enfin que :

$$A(B+C) = AB + AC \tag{4.229}$$

Wooow. Cool. □

(*Pour la petite histoire, c'est la première fois de ma vie que j'atteins une page de démonstration "un minimum propre" en jouant avec un système de référence et de pointage inter-document de divers résultats. C'est petit mais mignon.*)

**4.5.1.2.5.3 Élément absorbant et produit matriciel** Dans la lignée des propriétés sur le produit matriciel, une peut décemment retenir notre attention : il faut y faire attention ! On va raisonner en deux temps : montrer une propriété évidente puis ensuite montrer qu'une (fausse) évidence n'est pas une propriété véridique.

**Proposition 4.5.24.** Soient $A$ et $B$ deux matrices. Si $A$ **ou** $B$ est la matrice nulle alors le produit [a] de $A$ et $B$ est également la matrice nulle.

*a.* En se débrouillant pour qu'il soit compatible, c'est-à-dire en choisissant des dimensions adéquates pour les matrices nulles.

**Démonstration.** Faisons une disjonction de cas (motivée par le "ou"). Trois cas possibles : **ou** $A$ et $B$ sont égales à la matrice nulle, **ou** $A$ est la matrice nulle et $B$ une matrice quelconque, **ou** $B$ est la matrice nulle et $A$ une matrice quelconque. Sans perte de généralité, on remarque que les deux derniers cas sont équivalents (il n'y a qu'à faire attention à la dimension à la rigueur, mais par hypothèse on s'en fiche). Donc deux cas :

— si $A$ **et** $B$ sont égaux à la matrice nulle. Un rapide calcul montre que le produit de $A$ et $B$ équivaut également à la matrice nulle.

— si $A$ est la matrice nulle et que $B$ est une matrice quelconque de taille $(p, q)$. On se débrouille pour que la multiplication entre les deux soit compatible. Choisissons alors pour la matrice nulle $A$ une taille de $(n, p)$. Alors $AB$ est égal à :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix} \tag{4.230}$$

Encore une fois, grâce à la définition 4.5.19, on connaît la forme de chacun des coefficients de $AB$. Ces derniers sont donc :

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{p} 0 b_{kj} = 0 \tag{4.231}$$

Donc chacun des coefficients de la matrice obtenue est $0$. Donc $AB = 0_{nq}$.

□

La réciproque d'un tel résultat est-elle vraie ? Si $AB = 0$, a-t'on nécessairement $A$ ou $B$ égal à la matrice nulle ? C'est faux, à cet égard, on peut exhiber des exemples pour le prouver :

**Exemple.** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais manifestement, $A$ et $B$ ne sont ni l'une ni l'autre la matrice nulle.

Plus généralement que pour la matrice nulle, si on obtient l'égalité suivante $AB = AC$ entre les trois matrices $A, B$ et $C$, alors on ne peut pas simplifier par $A$ et déduire que $B = C$. On va le voir plus tard mais cette opération de "simplification" a un nom, elle s'appelle "prendre l'inverse" mais n'est pas toujours possible! (Donc ce n'est pas vraiment une simplification comme pourrait l'être la division dans $\mathbb{R}$ vu que dans $\mathbb{R}$ on peut toujours diviser (sauf par zéro, bien entendu).)

**4.5.1.2.5.4 Élément neutre et produit matriciel** À côté de l'élément neutre (le "zéro"), on trouve l'élément neutre (le "un"). De la même manière que chez les réels et complexes, on attend de lui qu'il préserve, ne change pas ce sur quoi on le fait agir. Assez logiquement, on en déduit que :

**Proposition 4.5.25.** Soit $A$ une matrice carrée compatible pour la multiplication avec la matrice identité $I_n$. Alors $AI_n = I_nA = A$.

**Démonstration.** La matrice $A$ est de taille $(n, n)$ (pour être compatible pour la multiplication avec $I_n$ et car elle est carrée). Pour prouver le résultat escompté, il n'y a qu'à dérouler les calculs en raisonnant sur les coefficients (on introduit à la volée la notation coeff$(X)_{ij}$ donnant les coefficients de la matrice $X$) :

$$\text{coeff}(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\text{coeff}(I_n)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} \tag{4.232}$$

$$\text{coeff}(I_nA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \text{coeff}(I_n)_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} \tag{4.233}$$

où $\delta_{ij}$ est le symbole de Kronecker défini tel que $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Dans une autre version de la démonstration, j'ai fait une connerie et je suis allé trop vite en besogne. Regardons patiemment, ce que l'on obtient pour quelques valeurs de $i$ et $j$ :

$$\text{pour } j = 1, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{k1} = a_{i1} \cdot 1 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{i1} \tag{4.234}$$

$$\text{pour } j = 2, \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{k2} = a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 1 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = a_{i2} \tag{4.235}$$

$$\text{pour } i = 1, \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}a_{kj} = 1 \cdot a_{1j} + 0 \cdot a_{2j} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} = a_{1j} \tag{4.236}$$

$$\text{pour } i = 2, \sum_{k=1}^{n} \delta_{2k}a_{kj} = 0 \cdot a_{1j} + 1 \cdot a_{2j} + \cdots + 0 \cdot a_{nj} = a_{2j} \tag{4.237}$$

On remarque (et démontre) plus généralement que pour $i$ et $j$ "quelconques" (dans la limite du possible, c'est à dire compris entre 1 et $n$) :

$$\text{coeff}(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\delta_{kj} = a_{ij} \tag{4.238}$$

$$\text{coeff}(I_nA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}a_{kj} = a_{ij} \tag{4.239}$$

Ce qui permet de conclure. Il reste néanmoins à montrer que $AI_n$ ou $I_nA$ est égal à $A$. Ce qui est automatique. □

**Remarque.** Le seul point un petit peu délicat dans la démonstration précédente intervient lors de l'introduction du symbole de Kronecker $\delta_{ij}$. Donnons juste un élément pour justifier son utilisation : on peut définir les coefficients de la matrice identité $I_n$ par une condition : si l'on est sur la diagonale principale, alors on met un un; sinon, un zéro. Ce qui revient à utiliser le symbole de Kronecker (en fonction de si $i = j$ ou pas).

Petite chose délicate quand on est étourdi également : ne pas chercher à trouver les coefficients de $A$ avec la formule 4.217. Dans une telle situation, ce n'est pas seulement con (on n'a aucune information sur $A$ et ses coefficients, donc on cherche quelque chose d'inatteignable). Pire, c'est même faux : on ne vérifie pas les conditions de compatibilité sur la dimension. Certes, on a une matrice carrée $(n, n)$. Dans ce cas, selon la définition 4.5.19, il faudrait considérer une matrice de dimension $(n, \text{qqch})$. Or, bah non : $a_{ij} \neq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot 1$. Gné, non. En plus on mélange tout... Non. À ne pas faire comme connerie!

**4.5.1.2.5.5 Puissance d'une matrice** On ne considère que les matrices carrées (autrement, on aurait de petit problème de compatibilité sur la multiplication : en effet, on multiplierai la même matrice par elle même, donc une matrice $(n, p)$ par une matrice $(n, p)$, ce qui n'est pas compatible).

**Définition 4.5.26** (Convention)**.** On note $A^2$ le produit de la matrice carrée $A$ par elle-même. Ainsi, $A^2 := AA$. On définit, par récurrence, de manière identique l'élévation de la matrice $A$ à une puissance $k$ (e.g. $A^3 = A^2A = AAA$).

**Remarque.** Par convention $A^0 = I_n$.

**Remarque.** $A^{n+1} = A^nA = AA^n$

Doit-on se limiter à un exposant positif ou nul? À vrai dire "non". On le verra plus tard avec la notion d'inverse, le fameux $A^{-1}$.

La dynamique avec les matrices semble nettement plus riche que celle pour les scalaires. Sans chercher à entrer trop dans les détails (la question pourrait être intéressante en développement et en étude), l'on pourrait se poser des problèmes analogues à ceux de la recherche des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$. Pour les matrices, c'est déjà un peu plus trépidant, ça va un peu plus loin que les (non pas moins intéressants) $\zeta_n$ : par exemple concernant les racines deuxièmes de l'unité : on trouve évidemment que $I_2^2 = I_2$ ou $(-I_2)^2 = I_2$. Mais ce n'est pas tout [18] :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I_2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2, \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}^2 = I_2 \tag{4.240}$$

ou des trucs un peu plus exotiques comme

$$\begin{pmatrix} i & 73+\sqrt{5327} \\ 73-\sqrt{5327} & -i \end{pmatrix}^2 = I_2 \tag{4.241}$$

. Et en plus, y'a moyen que ça fasse de beaux *petits* problèmes d'arithmétiques (avec une orientation algorithmique) car le carré de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{pmatrix}$. Donc le problème se ramènerait au système suivant :

$$\begin{cases} a^2+bc & = 1 \\ ab+bd & = 0 \\ ac+cd & = 0 \\ cb+d^2 & = 1 \end{cases} \tag{4.242}$$

Mais ce serait bien qu'enfin on fasse de l'algèbre linéaire, bon dieu ! Malheureusement, on verra dans quelques longs mois. En attendant, développons quelques éléments de calcul matriciel. On les aura juste en tête, histoire d'avoir des repères plutôt que de réelles connaissances approfondies.

## 4.5.2 Quelques éléments de calcul matriciel

Pour la suite des hostilités, je me suis basé sur différents documents que voici : [Yca11], [BB+16], [Rou18] et [Rou06].

On va voir quelques opérations qui, pour l'instant, ne relèveront de quasiment aucune utilité. À part calculer, on ne risque pas d'aller très loin. On va simplement essayer de se familiariser un peu avec ces derniers (en démontrant notamment des propriétés très basiques et rudimentaires).

### 4.5.2.1 Trace

On se place dans le cadre des matrices carrées.

**Définition 4.5.27.** Soit $A$ une matrice carrée de dimension $n$. La **trace** de la matrice $A$, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme des coefficients diagonaux de $A$ :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \tag{4.243}$$

18. Apparemment, il y aurait une histoire avec les matrices de Pauli (?).

où les $a_{ij}$ sont les coefficients de la matrice $A$.

**Remarque.** La trace d'une matrice est donc la somme de ses éléments diagonaux (ceux présents sur la diagonale principale).

**Exemple.**

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \tag{4.244}$$

**Proposition 4.5.28.** Soient $A$ et $B$ deux matrices carrées de dimension $n$. Alors :

1. $\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$ ;
2. $\mathrm{Tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{Tr}(A)$ pour tout $\alpha$ appartenant à $\mathbb{C}$ ;
3. $\mathrm{Tr}(A^{\intercal}) = \mathrm{Tr}(A)$ ; et,
4. $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

**Démonstration.**

1. appliquons simplement la définition 4.5.27 à $A + B$ et déroulons les calculs :

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}\right) \tag{4.245}$$

$$\mathrm{Tr}(A{+}B) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} + b_{nn} \end{pmatrix} = (a_{11}{+}b_{11}){+}(a_{22}{+}b_{22}){+}\cdots{+}(a_{nn}{+}b_{nn}) \tag{4.246}$$

$$\mathrm{Tr}(A + B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \tag{4.247}$$

2. même logique que pour la démonstration précédente : on "construit" / forme la matrice $\alpha A$ et lui applique la définition 4.5.27 afin de démontrer ladite propriété :

$$\mathrm{Tr}(\alpha A) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{n1} & \cdots & \cdots & \alpha a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.248}$$

$$\mathrm{Tr}(\alpha A) = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_{ii} = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \alpha \mathrm{Tr}(A) \tag{4.249}$$

3. on n'a pas encore défini la notion de transposée, anticipons un tout petit peu. *Intuitivement*, la transposée va "faire tourner la matrice sur elle-même" en

échangent les coefficients entre eux : les $a_{ij}$ vont devenir les $a_{ji}$ et inversement (les $a_{ji}$ deviennent les $a_{ij}$). Ainsi :

$$\mathrm{Tr}(A^\intercal) = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.250}$$

On constate que les coefficients sur la diagonale principale n'ont aucunement changé (seuls ceux en dessous et ceux au-dessus ont changé). De ce fait :

$$\mathrm{Tr}(A^\intercal) = \mathrm{Tr}(A) \tag{4.251}$$

Une telle formule est tout à fait logique : la diagonale principale "agit comme" / "se comporte comme" un axe de symétrie, il est donc naturel qu'elle soit invariante (sous sa propre action).

4. tout d'abord, on sait que l'on aura aucun problème de compatibilité du produit dans la mesure où les matrices $A$ et $B$ sont toutes deux carrées d'ordre $n$. Les produits $AB$ et $BA$ sont donc bien définis. Comment démontrer la propriété 4 ? Un petit retour au source à la formule 4.217 donnant la "tête" des coefficients de $AB$ et $BA$ puis une simple application de la définition 4.5.27 et le tour est joué !
En utilisant la formule 4.217, on obtient les coefficients de $AB$ et de $BA$ :

$$(ab)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \tag{4.252}$$

$$(ba)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} \tag{4.253}$$

On a précédemment remarqué (ou sinon on le fait maintenant) que la trace *ne s'intéresse qu'aux éléments sur la diagonale principale*. De ce fait, on peut se concentrer uniquement sur les coefficients pour lesquels $i = j$ (c'est-à-dire $(ab)_{ii}$ et $(ba)_{ii}$). Et c'est maintenant que je peux recaser le travail que j'avais fait pour la démonstration de la proposition 4.5.41. C'est pile ce qu'il faut ici. On va alors simplement chercher à démontrer que

$$\mathrm{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n} (ab)_{ii} = \sum_{k=1}^{n} (ba)_{ii} = \mathrm{Tr}(BA) \tag{4.254}$$

Pour peu que l'on ordonne et présente suffisamment bien les choses, ça devient une évidence. Voyons donc cela :

$$(ab)_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} \quad (4.255)$$
$$(ab)_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2} \quad (4.256)$$
$$\ldots = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \quad (4.257)$$
$$(ab)_{nn} = a_{n1}b_{1n} + a_{n2}b_{2n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \quad (4.258)$$

$$(ba)_{11} = b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \ldots + b_{1n}a_{n1} \quad (4.259)$$
$$(ba)_{22} = b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \ldots + b_{2n}a_{n2} \quad (4.260)$$
$$\ldots = \ldots + \ldots + \ldots + \ldots \quad (4.261)$$
$$(ba)_{nn} = b_{n1}a_{1n} + b_{n2}a_{2n} + \ldots + b_{nn}a_{nn} \quad (4.262)$$

On se rend visuellement compte qu'il existe une égalité algébrique (exactement celle désirée). Afin que ce soit plus clair et plus visible, trois exemples ont été mis en couleur (ceux des premiers, seconds et derniers coefficients de la diagonale principale). Avec un petit jeu de ré-arrangement des coefficients lorsqu'on les somme, on tombe évidemment sur l'égalité 4.254 désirée.
Une telle égalité peut surprendre dans la mesure où l'on s'est habitué à la non commutativité de $A$ et $B$. Toutefois, il ne convient de pas s'arrêter à cette intuition dans la mesure où l'on raisonne uniquement sur la diagonale principale avec la trace (diagonale principale "utilisée comme un axe de symétrie" par la trace, comme vu plus tôt).

□

**Corollaire 4.5.29** (sous les hypothèses de la proposition 4.5.28)**.** Si $A$ et $B$ sont des **matrices semblables**, c'est-à-dire qu'elles vérifient l'égalité $B = P^{-1}AP$ (où $P$ est une matrice carrée inversible d'ordre $n$), alors $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ ;

**Démonstration.** Conséquemment à la proposition 4.5.28, on sait que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. Injectons simplement la valeur $B = P^{-1}AP$, et nous obtenons :

$$\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(P^{-1}(AP)) = \mathrm{Tr}((AP)P^{-1}) = \mathrm{Tr}(A(PP^{-1})) = \mathrm{Tr}(AI_n) = \mathrm{Tr}(A) \quad (4.263)$$

La démonstration pourra être parfaitement comprise dès que l'on aura fait la partie sur l'inverse d'une matrice, dans très peu de temps (cf. la définition 4.5.40). □

Plus précisément que les propriétés une et deux de la proposition 4.5.28, la trace est une **forme linéaire** sur "l'espace des matrices carrées". On reste volontairement flou pour l'instant, il est encore trop tôt. Néanmoins, en pratique, ça signifie simplement que pour deux matrices carrées $A$ et $B$ et deux scalaires $\lambda$ et $\mu$ (d'une certaine structure algébrique), on a l'égalité suivante :

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mu \mathrm{Tr}(B) \quad (4.264)$$

**Remarque.** La trace peut être intéressante à divers égards. Par exemple, elle peut être utilisée pour démontrer qu'il n'existe pas de couple de matrices carrées $(A, B)$ tel que $AB - BA = I_n$. En effet : en raisonnant sur la trace, on constate que $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(AB) = 0$. Or, la trace de la matrice identité d'ordre $n$ vaut précisément $n$. Dans la mesure où $0$ est différent de $n$ ($n$ étant un entier strictement positif), il n'existe alors pas de couple $(A, B)$ tel que $AB - BA = I_n$.
En somme, la trace nous a ici permis de vérifier si une égalité est probable ou pas du tout. Si les deux traces ne correspondent pas, il est impossible que les deux matrices soient égales (en revanche, veillons à faire attention : la contraposée n'est pas vraie : deux matrices différentes peuvent avoir des traces identiques).

#### 4.5.2.2 Transposée

Contrairement à précédemment (pour la trace; ou plus tard pour le déterminant), on n'est plus obligé de se restreindre à des matrices carrées. En effet, on peut très bien calculer la **transposée** d'une matrice $(n, p)$.

**Définition 4.5.30.** Soit $A$ une matrice de taille $(n, p)$. La **transposée** de $A$, notée $A^\intercal$, est la matrice obtenue en interchangeant les colonnes avec les lignes (et inversement) de $A$. Formellement, en dénotant $a_{ij}$ les $np$ coefficients de la matrice $A$, on définit les coefficients de la matrice transposés tel que :

$$\mathrm{coeff}(A^\intercal)_{ji} = a_{ij} \tag{4.265}$$

**Exemple.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\,p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\,p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\,1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\,1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\,2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\,p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{4.266}$$

**Corollaire 4.5.31.** En conséquence de l'équation 4.265 définissant les coefficients de la matrice $A^\intercal$, la matrice transposée de $A$ est de taille $(p, n)$.

On avait déjà pu rapidement voir la notion de transposée à la proposition 4.5.28 (troisième propriété). À vrai dire, cette notion était déjà latente dans d'autres concepts. En effet, lorsque l'on a remarqué que le produit scalaire pouvait avoir une expression matricielle aux exemples 4.5.1.2.3 et 4.5.1.2.3, sans trop le dire, on a usé de la notion de transposition. Dans cette optique, lorsque l'on considère deux vecteurs, on va les prendre de même dimension (disons $(n, 1)$, c'est-à-dire une matrice colonne (cf. définition 4.5.7). Problème, problème! Pour calculer un produit scalaire, on conviendra que l'on calcul un *produit*, gné! Or, au sens de la condition de compatibilité sur la dimension de la définition 4.5.19, on est ici emmerdé! En effet, on veut faire le produit d'une matrice $(n, 1)$ avec une matrice $(n, 1)$, gné. Donc comment faire?! On va, subrepticement, utiliser, vite fait en soum-soum, la notion de transposée pour obtenir une matrice $(1, n)$. Et désormais, le produit est compatible! (Et faut faire néanmoins gaffe à l'ordre des multiplications! En effet, on ne veut pas obtenir une matrice $(n, n)$ mais bien un scalaire (donc une matrice $(1, 1)$).)

**Exemple.** Imaginons que l'on souhaite faire le produit scalaire entre les deux vecteurs colonnes suivants :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \tag{4.267}$$

$\vec{v}$ scalaire $\vec{w}$, noté $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ ou encore $\vec{v} \cdot \vec{w}$, va s'écrire :

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = (\vec{v}^\intercal)\vec{w} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{4.268}$$

On comprend et voit alors aisément que pour $n$ quelconque, on peut définir le produit scalaire entre deux vecteurs $A$ et $B$ tel que $A \cdot B = A^\intercal B$.

**Proposition 4.5.32.** Soient $A$ une matrice de dimension $(n, p)$. Alors :

1. $(A^\intercal)^\intercal = A$ ;
2. $(\alpha A)^\intercal = \alpha(A^\intercal)$ ;
3. $(A + B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal$, où $B$ est une matrice compatible pour l'addition (cf. 4.5.12) ; et,
4. $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$, où $A$ et $B$ sont compatibles pour la multiplication (cf. 4.5.19) ;

**Démonstration.**

1. Cette propriété est équivalente au fait de dire que la transposée est **involutive**. Prouvons la.
   Par définition, on applique simplement deux fois la relation 4.265 :

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\,p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\,p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\,1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\,1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\,2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\,p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{4.269}$$

$$(A^\intercal)^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\,1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\,2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\,p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\,p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\,p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\,1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = A \tag{4.270}$$

   Une telle relation n'a rien de franchement surprenant dans la mesure où "pivoter deux fois de $180$ degrés revient à effectuer un tour complet" (c'est-à-dire à "ne pas bouger", dans la mesure où $360$ degrés est congru à $0$ degré, modulo $360$).

2. Il n'y a qu'à appliquer les relations 4.265 et 4.209 :

$$(\alpha A)^\intercal = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{\mathbf{12}} & \cdots & \alpha a_{\mathbf{1\,p}} \\ \alpha a_{\mathbf{21}} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{\mathbf{2\,p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{\mathbf{n\,1}} & \cdots & \cdots & \alpha a_{np} \end{pmatrix}^\intercal = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\,1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\,2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\,p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = \alpha A^\intercal \tag{4.271}$$

3. Encore une fois, c'est de l'application pure et dure de relations fondamentales (4.265 et 4.5.12). On a de plus supposé les deux matrices compatibles pour l'addition, donc aucun problème !

$$(A+B)^\intercal = \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\,p}} \\ a_{\mathbf{21}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\,p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\,1}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{\mathbf{12}} & \cdots & b_{\mathbf{1\,p}} \\ b_{\mathbf{21}} & b_{22} & \cdots & b_{\mathbf{2\,p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{\mathbf{n\,1}} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}\right]^\intercal \tag{4.272}$$

$$(A+B)^\intercal = \left[\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{\mathbf{12}}+b_{\mathbf{12}} & \cdots & a_{\mathbf{1\,p}}+b_{\mathbf{1\,p}} \\ a_{\mathbf{21}}+b_{\mathbf{21}} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{\mathbf{2\,p}}+b_{\mathbf{2\,p}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{n\,1}}+b_{\mathbf{n\,1}} & \cdots & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix}\right]^\intercal \tag{4.273}$$

$$(A+B)^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{\mathbf{21}}+b_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\,1}}+b_{\mathbf{n\,1}} \\ a_{\mathbf{12}}+b_{\mathbf{12}} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\,2}}+b_{\mathbf{n\,2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\,p}}+b_{\mathbf{1\,p}} & \cdots & \cdots & a_{np}+b_{np} \end{pmatrix} \tag{4.274}$$

Ce qui nous permet alors de conclure que :

$$(A+B)^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{\mathbf{21}} & \cdots & a_{\mathbf{n\,1}} \\ a_{\mathbf{12}} & a_{22} & \cdots & a_{\mathbf{n\,2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathbf{1\,p}} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{\mathbf{21}} & \cdots & b_{\mathbf{n\,1}} \\ b_{\mathbf{12}} & b_{22} & \cdots & b_{\mathbf{n\,2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{\mathbf{1\,p}} & \cdots & \cdots & b_{np} \end{pmatrix} = A^\intercal + B^\intercal \tag{4.275}$$

4. Pas de nouveauté, on applique des relations (4.265 et 4.217) et tout roule. On va essayer d'être un peu plus précautionneux que pour les trois dernières propriétés. Tout d'abord, nous n'avons aucun problème de compatibilité pour l'addition. En effet, en tant que pré-requis, on requiert de $B$ qu'elle soit compatible pour la multiplication avec $A$ (c'est-à-dire que $B$ soit de taille $(p,q)$). Nous allons chercher à exhiber les coefficients de la transposée de $AB$ afin de se rendre compte qu'ils coïncident parfaitement avec ceux de la transposée de $B$ multiplié par la transposée de $A$. En fait non, on va faire les choses dans l'autre sens. Donc :

$$(b^\intercal a^\intercal)_{\mathbf{i\,j}} = \sum_{k=1}^{p} (b^\intercal)_{\mathbf{i\,k}} (a^\intercal)_{\mathbf{k\,j}} \tag{4.276}$$

C'est désormais que nous avons le seul point un tant soit peu *délicat*. En appliquant la définition 4.5.30 de la transposée, grâce à la formule 4.265, on constate que la transposée "échange les coefficients", elle "change leur ordre" (un $(i, j)$ devient un $(j, i)$). Donc, tout logiquement, on trouve que :

$$(b^\intercal a^\intercal)_{\mathbf{i}\,\mathbf{j}} = \sum_{k=1}^{p} b_{\mathbf{k}\,\mathbf{i}} a_{\mathbf{j}\,\mathbf{k}} = \sum_{k=1}^{p} a_{\mathbf{j}\,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\,\mathbf{i}} \tag{4.277}$$

Cette dernière équation nous permet de conclure :

$$(b^\intercal a^\intercal)_{\mathbf{i}\,\mathbf{j}} = \sum_{k=1}^{p} a_{\mathbf{j}\,\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}\,\mathbf{i}} = (ab)_{\mathbf{j}\,\mathbf{i}} = ((ab)^\intercal)_{\mathbf{i}\,\mathbf{j}} \tag{4.278}$$

Wooow. Super cool.

□

Pour les grandes lignes de la transposée, on devrait être plus ou moins bon (il reste un petit résultat avec le déterminant, on le traitera dans le paragraphe sur le déterminant). On va désormais voir deux mini-résultats et ensuite enchaîner sur deux types de matrices assez importants : les matrices symétriques et les matrices antisymétriques.

On a déjà pu avoir un tout petit peu à faire avec des matrices semblables. Définissons un peu plus proprement que précédemment (cf. la proposition 4.5.29) une telle notion :

**Définition 4.5.33.** Deux matrices carrées $A$ et $B$ sont dites **semblables** s'il existe une matrice $P$ inversible telle que :

$$A = PBP^{-1} \tag{4.279}$$

De telles matrices sont toutes mignonnes et peuvent être rudement intéressantes notamment si l'on souhaite calculer des exponentiation par exemple. Le but du jeu va être de trouver une matrice $P$ (et son inverse) ainsi qu'une matrice $B$ (plutôt ravissante, c'est-à-dire dont on calcule aisément ses puissances) liées à $A$ par la relation 4.279. Dans la pratique, quand on va chercher à calculer, par exemple, $A^k$ on va se simplifier le travail grâce à la formule suivante (qui peut se démontrer par récurrence) :

$$A^k = (PBP^{-1})^k = \underbrace{\underbrace{PBP^{-1}}\,\underbrace{PBP^{-1}}\ldots\underbrace{PBP^{-1}}}_{\text{k fois}} = PB^kP^{-1} \tag{4.280}$$

Sans doute pas forcément très utile en pratique, on trouve, en théorie, un résultat liant une matrice $A$ à sa transposée :

**Proposition 4.5.34.** Une matrice $A$ est semblable à sa transposée, c'est-à-dire qu'il existe une matrice $P$ inversible telle que :

$$A = PA^\intercal P^{-1} \tag{4.281}$$

**Démonstration.** Apparemment, en utilisant une chose qu'on appellerait la *réduction de Jordan*, ça deviendrait une trivialité. Autrement, ça semble être un exercice un petit peu "compliqué". (Par exemple, c'est un sujet de Centrale, 2003, Mathématiques 2 (TSI).) On verra ce que l'on peut en faire plus tard. □

Enfin, avant de passer aux matrices symétriques et antisymétriques, voyons un petit résultat qui va de lui-même :

**Proposition 4.5.35.** Soit $A$ une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure), la transposée de $A$ est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).

**Démonstration.** On rappelle la définition de matrice triangulaire supérieure 4.5.11, resp. inférieure : les coefficients $a_{ij}$ de $A$ vérifient la relation suivante : pour tous $i$ et $j$ tels que $i > j$, $a_{ij} = 0$, resp pour tous $i$ et $j$ tels que $i < j$, $a_{ij} = 0$.
Nous n'allons traiter que le cas d'une matrice triangulaire supérieure. Celui d'une matrice triangulaire inférieure se traite parallèlement.
Par hypothèse, nous savons que $A$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{np} \end{pmatrix} \tag{4.282}$$

Calculons simplement la transposée en appliquant la formule 4.265 :

$$A^\intercal = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \tag{4.283}$$

On reconnaît immédiatement une matrice triangulaire inférieure, comme désiré. □

##### 4.5.2.2.1 Matrices symétriques

**Définition 4.5.36.** Soit une matrice carrée $A$ d'ordre $n$. La matrice $A$ est dite **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = A^\intercal \tag{4.284}$$

**Remarque.** Les coefficients sont dits symétriques par rapport à la diagonale principale.

On pourrait, apparemment, s'amuser à compter le nombre de matrices symétriques pour un ordre $n$ donné.

##### 4.5.2.2.2 Matrices antisymétriques

**Définition 4.5.37.** Soit une matrice carrée $A$ d'ordre $n$. La matrice $A$ est dite **antisymétrique** si elle est égale à sa l'opposé de sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = -A^\intercal \tag{4.285}$$

**Remarque.** On appelle, en anglais, ces matrices *skew-symmetric*.

Une fois les matrices symétriques et les matrices antisymétriques introduites, on peut montrer un petit résultat (qui a son pendant en analyse réelle, cf. la démonstration) :

**Proposition 4.5.38.** Toute matrice est la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

**Démonstration.** Il va falloir raisonner un peu astucieusement. Pour ce faire, on va pouvoir utiliser la même idée que pour montrer que toute fonction peut être écrite comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. On introduit deux quantités :

$$\delta_{\mathrm{S}} = \frac{A + A^\intercal}{2} \tag{4.286}$$
$$\delta_{\mathrm{AS}} = \frac{A - A^\intercal}{2} \tag{4.287}$$

On remarque alors que $A = \delta_{\mathrm{AS}} + \delta_{\mathrm{S}}$. Il ne reste qu'à montrer que $\delta_{\mathrm{AS}}$ est antisymétrique et que $\delta_{\mathrm{S}}$ est symétrique. Pour cela, on utilise les résultats de la proposition 4.5.32 :

$$(\delta_{\mathrm{S}})^\intercal = \left[\frac{A + A^\intercal}{2}\right]^\intercal = \frac{1}{2}\left(A^\intercal + (A^\intercal)^\intercal\right) = \frac{1}{2}\left(A^\intercal + A\right) = \delta_{\mathrm{S}} \tag{4.288}$$

Donc $\delta_{\mathrm{S}}$ est bel et bien une matrice symétrique.

$$(\delta_{\mathrm{AS}})^\intercal = \left[\frac{A - A^\intercal}{2}\right]^\intercal = \frac{1}{2}\left(A^\intercal - (A^\intercal)^\intercal\right) = \frac{1}{2}\left(A^\intercal - A\right) = -\delta_{\mathrm{AS}} \tag{4.289}$$

Donc $\delta_{\mathrm{AS}}$ est bel et bien une matrice antisymétrique. □

#### 4.5.2.2.3 Matrice adjointe (Transposée du conjugué)

On se donne une matrice $A$ à coefficients complexes. On va chercher à voir s'il n'existerait pas un petit raffinement de ce que l'on connaît comme étant la matrice transposée de $A$ à coefficient réel.

**Définition 4.5.39.** On appelle matrice adjointe, notée $A^*$ ou $A^{\mathrm{H}}$ voire $A^\dagger$, d'une matrice $A$ à coefficients complexes, la matrice transposée de la matrice conjuguée de $A$. La matrice conjuguée, notée $\overline{A}$, n'étant rien d'autre que que la matrice obtenue en passant au conjugué chacun des éléments de ladite matrice.
Ainsi :

$$A^* = (\overline{A})^\intercal = \overline{(A^\intercal)} \tag{4.290}$$

Pour l'instant, un tel objet ne nous est d'aucune quelconque utilité. Ce sera intéressant lorsque l'on s'intéressera aux espaces hermitiens (et, *a fortiori*, à plus encore) ! Je ne pense pas qu'on revoie la matrice adjointe de si tôt... donc on va un peu laisser de côté les propriétés afférentes.

#### 4.5.2.3 Déterminant

On arrive désormais sur du lourd, mais malheureusement, on ne va pas vraiment voir en quoi ça peut être utile (changement de variable dans une intégrale multidimensionnelle, volume...). Encore une fois on se cantonne à quelques définitions rudimentaires et quelques propriétés venant d'elles-mêmes.

Au fond le déterminant (au moins en toute petite dimension) est quelque chose de très commun, on en trouve des traces dans les petites classes et notamment en seconde dans le chapitre sur les équations cartésiennes ou encore en spé Mathématiques concernant l'inverse d'une matrice.

À vrai dire, on peut donner quelques propriétés du déterminant (que l'on attend de lui) et montrer qu'il existe bien un objet (et un seul), **le déterminant**, les vérifiant. [19]

On est encore loin de pouvoir prétendre à des formules, exprimant le déterminant, type :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j),j} \tag{4.291}$$

En réalité, on va voir cette formule mais pas avec tous les "artifices" provenant de la théorie des groupes et de l'algèbre générale.

Au fond, qu'est-ce que le déterminant? Intuitivement? On l'a vu les matrices peuvent permettre de considérer l'orthogonalité, des longueurs... et si c'était également possible d'avoir une idée du volume d'un polygone multidimensionnel (engendré par un certain nombre de points). Plusieurs problèmes arrivent : pourquoi un polygone? qu'est-ce que cette histoire de points? pourquoi un volume? Pour la suite, on ne va considérer que des matrices carrées. Sur ces matrices $(n, n)$, on peut se dire que reposent $n$ vecteurs de $n$ composantes : un pour chaque colonne. Au fond, chacun de ces vecteurs (pour peu qu'on le fasse partir de l'origine) va permettre de représenter un point. De manière plus générale, si l'on considère l'ensemble de ces $n$ vecteurs, on obtient $n$ points de l'espace. Il y a fort à penser (on ne le démontre pas) que l'ensemble de ces points forme une figure à $n$ sommets. Et s'il existait une manière de calculer son volume, ce serait merveilleux.

On laisse carrément de côté l'aspect géométrique pour ne se concentrer plus que sur du calcul pur. À moins que... à moins qu'on laisse planer le doute jusqu'à l'année prochaine! En effet, on ne va rien faire de plus. La grande majorité des notions fait appel à des éléments du supérieur. Disons simplement que l'on a fait une petite introduction à l'existence d'une chose nommée déterminant. Il est trop tôt pour aller sérieusement plus loin.

19. On verra plus tard des énoncés type : *l'application déterminant en base $B$ est l'unique forme $n$-linéaire alternée sur un espace $E$ vérifiant* $\det_B(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$, *abrégé en* $\det_B(B) = 1$.

### 4.5.2.4 Inverse d'une matrice carrée

On a déjà un tout petit peu évoqué la notion d'**inverse d'une matrice** lorsque l'on définissait ce qu'était la puissance d'une matrice 4.5.26. Voyons plus précisément ce que c'est. On s'attardera sur l'exemple bien particulier des matrices carrées d'ordre 2 avant d'esquisser quelques considérations générales.

**4.5.2.4.1 Généralités** La notion d'inversibilité pour les matrices n'est rien d'autre que la spécification d'une notion déjà bien connue (par exemple chez les réels). L'on trouve aisément l'inverse de 7 dans $\mathbb{R}$, par exemple. On se retrouve un peu plus embêté dès que l'on réfléchi dans "quelque chose" de "plus petit" que $\mathbb{Q}$ ($\mathbb{Z}$ par exemple). L'on va également pouvoir être "gêné" chez les matrices. Il existe des choses que l'on verra en détail plus tard($\mathrm{GL}_n(K)$, $\mathrm{SL}_n(K)$...) qui utilisent la notion d'inverse et permettent de ne pas trop se poser de question : est-ce que $X$ ou $Y$ est inversible ? C'est là d'ailleurs une question importante (à notre modeste échelle). Le calcul de l'inverse d'une matrice peut être extrêmement laborieux. Mais, restons sur de grandes généralités pour l'instant.

**Définition 4.5.40.** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. $A$ est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée $B$ d'ordre $n$ telle que $AB = BA = I_n$.

**Exemple.** Si l'on remarque que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -I_2 \tag{4.292}$$

que peut-on en déduire ? Que $A$ est inversible d'inverse $-A$. En effet : $A(-A) = I_2$.

**Remarque.** On jette à la trappe la matrice nulle. En effet, la matrice nulle étant un *élément absorbant*, toute produit d'une matrice quelconque avec la matrice nulle donne la matrice nulle : donc impossible que ce puisse être égal à la matrice identité. Ainsi, la matrice nulle n'est pas inversible (car il n'existe pas d'inverse adéquat).
On commence à s'apercevoir que toutes les matrices ne sont pas forcément inversibles (pour l'instant, on en connaît au moins une).
En effet, étudions plus précisément la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}$. Considérons désormais une matrice $B$ quelconque et supposons qu'elle soit l'inverse de la matrice $A$. Alors, on s'attend à ce que $AB = BA = I_2$. Calculons $AB$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4c & b+4d \\ -\frac{1}{2}a - 2c & -\frac{1}{2}b - 2d \end{pmatrix} = I_2 \tag{4.293}$$

Cela nous conduit au système de quatre équations suivant (on verra "en détail" cette histoire de systèmes et le lien avec les matrices sous très peu) :

$$\begin{cases} a + 4c & = 1 \\ b + 4d & = 0 \\ -\frac{1}{2}a - 2c & = 0 \\ -\frac{1}{2}b - 2d & = 1 \end{cases} \tag{4.294}$$

Or problème : si l'on regarde la première et la troisième équation, l'on trouve une contradiction. En effet, d'un côté $a + 4c = 1$ et de l'autre $-\frac{1}{2}a - 2c = 0$ (ce qui revient à, après multiplication par moins deux : $a + 4c = 0$). [a]

En somme, la matrice $A$ n'est pas inversible.

*a.* Il conviendrait une meilleure justification. L'idée est qu'une somme de choses linéaires ne peut pas avoir deux valeurs possibles.

Si l'on regarde la définition 4.5.40, il existe en réalité un élément superflus qui peut être déduit (et n'a donc par conséquent pas vraiment besoin d'être posé dans la définition, toutefois, c'était le choix de ma professeure).

**Proposition 4.5.41.** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. Si $B$ est une matrice carrée d'ordre $n$ telle que $AB = I_n$, alors $BA = I_n$.

Réciproquement, si $B$ est une matrice carrée d'ordre $n$ telle que $BA = I_n$, alors $AB = I_n$.

**Démonstration.** On laisse la réciproque de côté. On ne prouve que la première proposition. (Notons que, avec le "peu de moyen" que l'on a pour l'instant, il va falloir démontrer la propriété en la travaillant au corps. En appliquant les définitions fondamentales).

On va chercher à prouver la commutativité. L'idée est simple : si $B$ est l'inverse de $A$, on s'attend à ce que $A$ soit également l'inverse de $B$.

Tout d'abord, on sait que l'on aura aucun problème de compatibilité du produit dans la mesure où les matrices $A$ et $B$ sont toutes deux carrées d'ordre $n$. Les produits $AB$ et $BA$ sont donc bien définis.

Je suis con, à la base je m'étais fait tout un bins à essayer de raisonner sur les coefficients etc... en cherchant à montrer des choses type $\sum_{k=1}^{n}(ba)_{ii} = \sum_{k=1}^{n}(ab)_{ii}$. (Le problème étant que le résultat n'est pas suffisamment fort, il ne caractérise pas suffisamment bien ce qui nous intéresse.)

En fait, on peut juste raisonner sur la transposée : $I_n = (I_n)^\intercal = (AB)^\intercal = BA$ et hop c'est plié [a]. $\square$

*a.* Il y a d'ailleurs toute une discussion qui semble fort intéressante en cherchant d'autres démonstrations : [MSE].

L'intérêt d'une telle proposition permet de ne retenir **que** le critère suivant : pour montrer qu'une matrice $A$ est inversible, **il suffit** de montrer qu'il existe une matrice $B$ telle que $AB = I_n$. (Sans avoir à se préoccuper de la réciproque.)

Montrons désormais un petit résultat important qui scelle définitivement le sort de l'inverse d'une matrice :

**Proposition 4.5.42.** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. Si $A$ est inversible alors l'**unique** matrice $B$ d'ordre $n$ telle que $AB = I_n$ est appelée **matrice inverse de** $A$ et est notée $A^{-1}$.

**Démonstration.** Raisonnons par l'absurde pour prouver que l'inverse d'une matrice est unique. À cet effet, supposons que $A$ possède plus d'un inverse, disons $2$ pour fixer les choses que l'on va noter $B_1$ et $B_2$. Par hypothèse, on sait que $B_1A = AB_1 = I_n = B_2A = AB_2$. On cherche alors à montrer que $B_1 = B_2$. En vertu de la réciproque de la proposition 4.5.24, on sait que l'on ne peut pas procéder en utilisant une équation produit nul (c'est-à-dire former le produit $A(B_1 - B_2) = 0_n$ et en déduire que $B_1 = B_2$).
On considère la quantité suivante : $B_1AB_2$, elle est égale à $B_1I_n = B_1$ ou encore à $I_nB_2$, ce qui permet de conclure que $B_1 = B_2$. En effet, plus visuellement, on a :

$$\underbrace{B_1A}_{=I_n} B_2 = B_1 \underbrace{AB_2}_{=I_n} \tag{4.295}$$

□

Enfin, avant de s'attarder sur le cas particulier des matrices carrées d'ordre $2$ et d'entrapercevoir ce qu'il se passe pour $n$ quelconque, voyons quelques propriétés de l'inverse.

**Proposition 4.5.43.** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. On suppose que $A$ est inversible.

1. $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ ;
2. $A^nA^{-1} = A^{n-1}$ ;
3. $(A^{-1})^{-1} = A$ ;
4. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, pour $B$ une matrice carrée inversible d'ordre $n$ ;
5. $(\alpha A)^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1}$, pour un $\alpha$ scalaire non nul ;
6. $(A^\intercal)^{-1} = (A^{-1})^\intercal$, si $A^\intercal$ est inversible ; et,
7. $AC = BC$ implique $A = B$ si $C$ est une matrice carrée inversible d'ordre $n$ et $B$ une matrice carrée d'ordre $n$.

**Démonstration.**

1. par définition, c'est une évidence.
2. idem.
3. par application de la propriété numéro $1$, on a que $(A^{-1})^{-1}A^{-1} = I_n$, d'où : $(A^{-1})^{-1}A^{-1}A = I_nA = A$.
4. dans la même logique que pour la démonstration de la propriété numéro $3$, on a : $(AB)^{-1}AB = I_n$, d'où : $(AB)^{-1}ABB^{-1} = I_nB^{-1} = B^{-1}$ et enfin : $(AB)^{-1}AA^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
5. c'est une conséquence de la propriété numéro $4$ en remarquant simplement que la multiplication par un scalaire est commutative (en notant que l'inverse d'un scalaire reste et est toujours un scalaire, pour peu que l'on considère le bon "ensemble",

mais ici aucun problème avec les réels ou les complexes par exemple, tant que $\alpha$ est différent de zéro du moins). En clair, en appliquant la propriété 4, on trouve :

$$(\alpha A)^{-1} = A^{-1}\alpha^{-1} = \alpha^{-1}A^{-1} \tag{4.296}$$

6. sans plus de surprise que pour les démonstrations des propriétés 3 et 4, on raisonne de manière similaire. Néanmoins, nous allons utiliser une propriété supplémentaire : $(AB)^\intercal = B^\intercal A^\intercal$ (cf. proposition 4.5.32). Ainsi : $(A^{-1})^\intercal A^\intercal = (AA^{-1})^\intercal = I_n^\intercal = I_n$, d'où alors : $(A^{-1})^\intercal A^\intercal (A^\intercal)^{-1} = I_n(A^\intercal)^{-1}$. Ce qui donne le résultat escompté : $(A^{-1})^\intercal = (A^\intercal)^{-1}$.
7. on entraperçoit quelque peu la section suivante sur les systèmes linéaires. Démontrons cette propriété afin de commencer à se familiariser avec ces derniers. On a supposé $C$ inversible donc multiplions à gauche par l'inverse de $C$ :

$$ACC^{-1} = BCC^{-1} \text{ qui devient } A\underbrace{CC^{-1}}_{=I_n} = B\underbrace{CC^{-1}}_{=I_n} \tag{4.297}$$

d'où $A = B$.

□

#### 4.5.2.4.2 Matrices carrées d'ordre 2

**Proposition 4.5.44.** Soit $A$ la matrice carrée d'ordre 2 suivante $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suppose $A$ non nulle. Alors, si $A$ est inversible, son inverse s'exprime tel que :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{4.298}$$

**Démonstration.** Il n'y a qu'à faire le calcul :

$$AA^{-1} = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right]\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{4.299}$$

$$AA^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I_2 \tag{4.300}$$

□

**Remarque.** On remarque alors qu'une matrice carrée d'ordre 2 n'est inversible qu'à la condition suivante : que $ad - bc$ soit non nul (ce qui revient à postuler que le déterminant de ladite matrice soit non nul).

#### 4.5.2.4.3 Matrices carrées d'ordre $n$

**Proposition 4.5.45.** Soit $A$ une matrice carrée d'ordre $n$. On suppose $A$ non nul. Alors, si $A$ est inversible, son inverse s'exprime tel que :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{com}(A)^{\intercal} \tag{4.301}$$

**Remarque.** De manière similaire au cas $n = 2$, on déduit que la matrice est inversible si et seulement si son déterminant est différent de zéro.

On ne définit pas pour l'instant ce qu'est ce $\operatorname{com}(A)$, la comatrice, on verra plus tard. Notons toutefois, en fin de compte que la méthode de la proposition 4.5.45 pour calculer l'inverse d'une matrice se fait supplanter par d'autres méthodes, par exemple celle du pivot de Gauss que l'on aura l'occasion de voir dans quelques mois.

#### 4.5.2.5 Systèmes linéaires

### 4.5.3 Suites de matrices et marches aléatoires

#### 4.5.3.1 Suite de matrices "arithmético-géométriques"

#### 4.5.3.2 Convergence de suite de matrices "arithmético-géométriques"

#### 4.5.3.3 Marches aléatoires : chaîne de Markov

#### 4.5.3.4 Étude asymptotique d'une marche aléatoire

## 4.6 Introduction à la théorie des graphes

Même si (en spécialité Mathématiques) on a pas eu à proprement dit de cours introductif à la théorie des graphes, on a pu en entendre parler pas mal de fois (que ce soit à l'intérieur même du programme (une marche aléatoire sur un graphe) ou bien de manière détournée, au gré d'une envie de la professeure). J'aimerais bien m'introduire en un tel domaine. Ça a pas franchement l'air si fou que ça. Je pense qu'on peut avoir le même préavis que pour les matrices quand on ne va pas franchement plus loin que les définitions rudimentaires et que l'on a pas introduit des objets "vraiment" intéressants : boh, c'est juste un tableau de nombre. Ça a l'air un peu austère... Le but va être de dépasser se clicher et de se constituer un bon petit début de cours (et y revenir plus tard si jamais ça m'a intéressé à un moment ou un autre) !

De manière pas trop étonnante, je n'ai (dans ma petite bibliothèque numérique) absolument rien sur la théorie des graphes (mis à part un cours d'introduction à la topologie assez avancé : graphes, surfaces et nœuds [dV97] (et c'est un cours à la physicienne)).

Zieutons un peu internet (et j'irai voir spécifiquement en bibliothèque dans pas trop longtemps). Wow (plus de 15'000 citations) : [BM91] [20]. J'ai l'impression de découvrir des mathématiques que je n'avais jamais vues ! Gardons le suspens !!! [21]

20. Pour la petite introduction que je veux, le premier chapitre *Graphs and subgraphs* devrait être largement suffisant (quitte à aller gratter un peu à côté).

21. En deux clics j'ai découvert ça : [Kre18] !!! Putain de merde, la partie "*Connections*" a l'air fantastique !!! Espérons que ce soit plus que de la simple poudre aux yeux.

# Partie III

# Études et développements – Première et Terminale

# Chapitre 5

# Géométrie

## 5.1 Identités trigonométriques (approfondissements)

## 5.2 Volume d'une $n$-sphère

## 5.3 Barycentre

### 5.3.1 Fonctions scalaires et vectorielles de Leibniz

### 5.3.2 Suites barypolygonales

## 5.4 Intersection(s) : courbes paramétrées et tangentes paramétrées

## 5.5 Coniques

## 5.6 Triangulation et optimalité

## 5.7 Empilements de sphères

## 5.8 Dans l'espace tout entier

## 5.9 Courte introduction à la géométrie projective

# Chapitre 6

## 6.1 Racines nièmes de l'unité (complexes)

## 6.2 Racines nièmes de l'unité (matrices)

## 6.3 Racines de polynômes : calcul (degré $3$ et $4$)

## 6.4 Théorème fondamental de l'algèbre

## 6.5 Factorisations

## 6.6 Relations de Viète

## 6.7 Théorème de Sturm

## 6.8 Classes de polynômes

### 6.8.1 Polynômes de Bernstein

### 6.8.2 Polynômes de Chebychev



## 6.9 Fractions rationnelles

L'histoire semble commencer avec des matrices et finit dans des *algèbres de Lie de groupes de Lie* (qu'est-ce ?).

Commençons par le commencement : on se souvient des problèmes de commutativité que l'on pouvait rencontrer avec les matrices (cf. la section 4.5.1.2.5.1). De manière générale, on est bien loin d'avoir l'égalité suivante :

$$AB = BA \tag{6.1}$$

où $A$ et $B$ sont deux matrices compatibles pour le produit (on va même dire carrées tant qu'à faire).

Alors alors comment faire ? Comment "*dériver*" la formule de Baker-Campbell-Hausdorff ? Comme un couillon, je pensais qu'une simple étude du Taylor (ordre par ordre) de $\exp(X)\exp(Y)$ suffirait... Un petit programme [1], et c'était réglé :

```
from sympy import exp, MatrixSymbol, Sum, factorial
from sympy import simplify, expand
from sympy.abc import k

x = MatrixSymbol('X', 2, 2)
y = MatrixSymbol('Y', 2, 2)
z = MatrixSymbol('Z', 2, 2)



def exp_mat(mat, N):
return Sum(mat**k/factorial(k), (k, 0, N)).doit()



for N in range(5):
print(N, " — ", expand(exp_mat(x, N) * exp_mat(y, N)))
print(" ", " — ", exp_mat(z, N))
```

C'est peut-être un peu plus compliqué que prévu. Mais à vrai dire, je ne crois même pas réfléchir sur les bons objets (ça va péter dans la théorie des groupes de Lie, géométrie différentielle). L'énoncé précis est le suivant :

**Proposition 6.12.1** ([Tu04]). Soient $G$ un groupe de Lie et $\mathfrak{g} = T_1G$ son algèbre de Lie, vue comme l'espace tangent à $G$ en l'élément neutre $1$. Alors il existe un voisinage $V$ de $0$ dans $\mathfrak{g}$ et un voisinage $U$ de $1$ dans $G$ tels que la restriction de l'application exponentielle $\exp : V \to U$ est un difféomorphisme. Son inverse $U \to V$ s'appelle le logarithme et s'écrit $\log$. Si deux éléments $A$ et $B$ de $\mathfrak{g}$ sont suffisamment proches de l'origine, alors la formule

1. Je ne sais pas si fallait spécifier un truc type *commutative=False*.

de Campbell-Hausdorff donne l'expression de $\log(\exp(A)\exp(B))$ en tant que série entière dans l'algèbre de Lie engendrée par $A$ et $B$ :

$$\exp(A)\exp(B) = \exp\left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] + [B, [B, A]]) + \dots\right). \tag{6.2}$$

De manière tout aussi technique, on trouve l'énoncé suivant :

**Proposition 6.12.2.** Let $G$ be a Lie group of Lie algebra $\mathfrak{g}$ and let $X, Y$ be elements of the Lie algebra $\mathfrak{g}$. Then :

$$\log(\exp(X)\exp(Y)) = X + \int_0^1 \psi(\exp(\mathrm{ad}_X)\exp(t\mathrm{ad}_Y))Y\,\mathrm{d}t \tag{6.3}$$

whenever the $\log(\exp(X)\exp(Y))$ is defined.

De manière générale, la formule BCH joue un rôle important dans différents domaines, par exemple :

- Mathematics : theory of linear differential equations, Lie groups, numerical analysis of differential equations ;
- Theoretical Physics : perturbation theory, quantum mechanics, statistical mechanics, quantum computing ; et,
- Control theory : design and analysis of nonlinear control mechanisms, nonlinear filters, stabilization of rigid bodies,...

Pour mieux ouvrir les hostilités : aller voir cet ouvrage : [BF11].

Néanmoins, en attendant, il y a un sujet du second concours (2009, ÉNS de Lyon) qui démontre élémentairement un cas bien particulier.

J'espère avoir l'occasion de revenir grandement sur ce sujet plus tard. Afin de ne pas le laisser trop vacant, je vais juste modifier un petit peu le programme au-dessus car je crois avoir trouvé le moyen de moyenner (et de parvenir au but) !

```
from sympy import Symbol, Sum, factorial
from sympy import expand
from sympy.abc import k
from sympy import latex

x = Symbol('X', commutative=False)
y = Symbol('Y', commutative=False)

def exp_mat(mat, N):
return Sum(mat**k/factorial(k), (k, 0, N)).doit()

def log_mat(mat, N):
return Sum((-1)**(k + 1) * (mat)**k/k, (k, 1, N)).doit()
```

```
for N in range(3):
print(N, " — exp — ", latex(expand(exp_mat(x, N) * exp_mat(
    y, N), N)))
print(N, " — log(exp) — ", latex(expand(log_mat(- 1 +
    expand(exp_mat(x, N) * exp_mat(y, N), N), N))))
```

Par exemple, à l'ordre $2$, on obtient une formule qui a cette tête :

$$\begin{multlined}X+\frac{XY}{2}-\frac{XYX}{2}-\frac{XYXY}{2}-\frac{XYXY^2}{4}-\frac{XYX^2}{4}-\frac{XYX^2Y}{4}-\frac{XYX^2Y^2}{8}-\frac{XY^2}{4}\\
-\frac{XY^2X}{4}-\frac{XY^2XY}{4}-\frac{XY^2XY^2}{8}-\frac{XY^2X^2}{8}-\frac{XY^2X^2Y}{8}-\frac{XY^2X^2Y^2}{16}-\frac{XY^3}{2}\\
-\frac{XY^4}{8}-\frac{X^2Y}{4}-\frac{X^2YX}{4}-\frac{X^2YXY}{4}-\frac{X^2YXY^2}{8}-\frac{X^2YX^2}{8}-\frac{X^2YX^2Y}{8}\\
-\frac{X^2YX^2Y^2}{16}-\frac{3X^2Y^2}{8}-\frac{X^2Y^2X}{8}-\frac{X^2Y^2XY}{8}-\frac{X^2Y^2XY^2}{16}-\frac{X^2Y^2X^2}{16}\\
-\frac{X^2Y^2X^2Y}{16}-\frac{X^2Y^2X^2Y^2}{32}-\frac{X^2Y^3}{4}-\frac{X^2Y^4}{16}-\frac{X^3}{2}-\frac{X^3Y}{2}-\\
\frac{X^3Y^2}{4}-\frac{X^4}{8}-\frac{X^4Y}{8}-\frac{X^4Y^2}{16}+Y-\frac{YX}{2}-\frac{YXY}{2}-\frac{YXY^2}{4}-\frac{YX^2}{4}\\
-\frac{YX^2Y}{4}-\frac{YX^2Y^2}{8}-\frac{Y^2X}{4}-\frac{Y^2XY}{4}-\frac{Y^2XY^2}{8}-\frac{Y^2X^2}{8}-\frac{Y^2X^2Y}{8}\\
-\frac{Y^2X^2Y^2}{16}-\frac{Y^3}{2}-\frac{Y^4}{8}\end{multlined}\tag{6.4}$$

En réalité, il fallait totalement changer l'angle d'approche[2] et chercher à calculer $\log(\exp(X)\exp(Y))$ plutôt que simplement $\exp(X)\exp(Y)$. (Ce qui est au fond très logique étant donné que l'on cherche $Z$ plutôt que $\exp(Z)$ dans l'équation $\exp(Z)=\exp(X)\exp(Y)$.)

2. Je me demande si je n'ai pas fait une erreur, que ce soit sur le développement en série du logarithme ou ailleurs ? C'est quand même étonnant d'avoir autant de signes moins…

# Chapitre 7

# Analyse

## 7.1 TVI (approfondissements)

## 7.2 TAF et Rolle (approfondissements)

## 7.3 Théorème des bornes atteintes

## 7.4 Exemples de suites

### 7.4.1 Suites adjacentes

### 7.4.2 Suites de Cauchy

### 7.4.3 Suites récurrentes du second ordre

### 7.4.4 Suite audioactive de Conway

## 7.5 Exemples de fonctions

### 7.5.1 Fonction de Weierstrass

### 7.5.2 Fonction gamma et G de Barnes

### 7.5.3 Fonction bêta

### 7.5.4 Fonction zêta

(Pour introduire, "à ma manière", la fonction zêta, je ne vais pas me préoccuper de la construction historique. Je pars d'une idée et je déroule selon un cheminement qui me semble "naturel" (après coup, gné).)

Dans la partie cours, on a pu considérer la somme suivante (cf. l'équation 4.17) :

$$S_{n,1} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n \tag{7.1}$$

De la même manière on peut être amené à s'intéresser à des sommes un peu plus complexes :

$$S_{n,2} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \tag{7.2}$$

$$S_{n,3} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 \tag{7.3}$$

$$\ldots = \ldots \tag{7.4}$$

De manière générale, on serait amené à étudier la fonction suivante : $S_{n,p} = \sum_{i=1}^{n} i^p$. En cherchant un peu, on peut se débrouiller pour trouver une forme close de $S_{n,p}$. Néanmoins, assez rapidement, ça devient assez compliqué de s'y retrouver. Mais il y a toujours (?) un moyen de s'en sortir : aujourd'hui, ça s'appelle la **formule de Faulhaber** :

$$S_{n,p} = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^{p} \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j} \tag{7.5}$$

avec $B_j$ les nombres de Bernoulli (dont on prend la convention $B_1 = 1/2$). Notons qu'il existe des expressions équivalentes (n'utilisant pas les nombres de Bernoulli) mais ici ça ne nous intéresse pas (juste pour l'information, dans un vieux document, j'avais pu démontrer que l'on pouvait juste se démerder avec des sortes de polynômes d'Hilbert (ou plutôt symboles de Pochhammer)).

Ayant trouvé ça, l'aventure est-elle finie ?!! On peut faire au moins deux choses : "changer la nature" de $p$ et penser à essayer de faire tendre $n$ vers l'infini. Typiquement, que se passe-t'il quand on s'autorise à prendre des $p$ entiers négatifs (ou positifs) ? (À noter que la formule de Faulhaber ne s'applique pas directement (?).) On en vient à considérer :

$$\lim_{n\to\infty} S_{n,p} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} = \zeta(p) \tag{7.6}$$

Bonjour chère **fonction zêta de Riemann**. On ne va pas aller très loin, mais, pour la forme, sachons qu'une fonction qui paraît si innocente n'est en fait qu'une "réminiscence" de tout un complexe de théories profondes et en plein développements aux résultats spectaculaires (surtout à partir du moment où de l'algèbre entre en jeu). Pour le peu que l'on puisse dire (ou plutôt recopier), il y a des développements dans tous les sens : les *local zêta functions* [Igu07] :

$$Z_\Phi(s) = \int_X |f(x)|_K^s \Phi(x) \mathrm{d}x \tag{7.7}$$

des trucs p-adiques [Col02] (e.g. les fonctions $L$ $p$-adiques attachées aux caractères de Dirichlet), les fonctions zêtas de courbes elliptiques, problèmes d'irrationalité [Riv03]...

Avant de recommencer et de voir deux ou trois résultats vraiment basiques et fondamentaux (on s'attachera à calculer $\zeta(2)$ dans un développement ultérieur), (re) définissons la fonction zêta de Riemann :

**Définition 7.5.1** ([dMa]). La fonction zêta de Riemann est définie, pour $s \in \mathbb{C}$ complexe avec $\mathrm{Re}(s) > 1$, par la série :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{7.8}$$

elle est convergence et elle définit une fonction holomorphe dans le demi-plan complexe $\{\mathrm{Re}(s) > 1\}$.

Premier "petit" problème, qu'est-ce qu'une fonction holomorphe ?

**Définition 7.5.2** ([Col11]). Soient $\Omega$ un ouvert $\mathbb{C}$, et $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Si $z_0 \in \Omega$, si $r > 0$, et si $\mathrm{D}(z_0, r^-) \subset \Omega$, on dit que $f$ est **développable en série entière sur** $\mathrm{D}(z_0, r^+)$, s'il existe $\mathrm{F} \in \mathbb{C}[[T]]$, de rayon de convergence supérieur ou égal à $r$, telle que $f(z) = \mathrm{F}(z - z_0)$, pour tout $z \in \mathrm{D}(z_0, r^-)$.

On dit que $f$ est **développable en série entière autour de** $z_0$ s'il existe $r > 0$ tel que $f$ soit développable en série entière sur $\mathrm{R}(z_0, r^-)$, et on dit que $f$ est **analytique sur** $\Omega$ ou encore que $f$ est **holomorphe sur** $\Omega$, si $f$ est développable en série entière autour de tout point de $\Omega$.
(Notons qu'une fonction analytique sur $\Omega$ est $\mathcal{C}^\infty$ au sens complexe sur $\Omega$.)

En gros, si l'on résume très grossièrement, une fonction holomorphe n'est rien d'autre qu'une fonction dérivable (au sens complexe) (et truc cool, que l'on se réserve pour la partie *Introduction aux spécificités de l'analyse complexe* : $\mathcal{C}^1$ implique $\mathcal{C}^\infty$). Pour l'essentiel, on va tenter de faire l'exercice du Gourdon d'Analyse [Gou20] :

<u>a)</u> Montrer que $\zeta$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives.

J'ai zieuté la correction sans trop faire exprès et il est bien gentil Monsieur Gourdon pour la deuxième partie de la question, il dit "montrons que les dérivées successives valent ..." ouais mais comment tu le trouves champion ? gné. Nous on va y aller pas à pas.

TODOOOOOOOOOO

On va finir en citant l'hypothèse de Riemann généralisée et en entrevoyant une autre (on va y aller comme des sauvages et salement, on y va "au désir") :

**Conjecture 7.5.3** ([Bom]). The nontrivial zeros of $\zeta(s)$ have real part equal to $\frac{1}{2}$.

Bombieri (dans [Bom]) définit les zéros non triviaux par opposition à ceux dits triviaux $(-2, -4, -6, \ldots)$.

Habituellement, l'un des grands retentissements d'une preuve de l'hypothèse de Riemann, tel que vulgarisé, est présenté comme une très bonne compréhension de la répartition des nombres premiers.

Bombieri, lui, écrit cela :

*The failure of the Riemann hypothesis would create havoc(=ravage) in the distribution of prime numbers. This fact alone singles out the Riemann hypothesis as the main open question of prime number theory.*

Aujourd'hui, aucune idée d'où c'en est (Bombieri a publié quelque chose [Bom19]), y'a eu la tentative d'Atiyah peu avant sa mort (j'ai cru comprendre que certains spécialistes n'y croyaient que moyennement (une "simple" preuve par l'absurde, certains disaient même qu'ils seraient déçus s'il avait raison car ils attendaient qu'avec la résolution de la conjecture vienne toute une panoplie d'idées nouvelles)). Apparemment, on est encore très loin de quoi que ce soit.

Je me souviens être tombé en 2018 sur un article nommé **La preuve par André Weil de l'hypothèse de Riemann pour une courbe sur un corps fini** [Hin12]. Je ne connaissais ni André Weil, ni ce que pouvait bel et bien être une courbe sur un corps fini, je ne connaissais pas Marc Hindry. Donc, comme un con, sans trop réfléchir, je me suis dit que ce devait être une démonstration foireuse, "du pipeau" (sinon l'hypothèse de Riemann serait un théorème, gné). Ahhh... si dieu savait... Bêtises !

On va rencontrer des choses magnifiques et pouvoir définir tout un tas de fonctions zêtas et aller bien plus loin (jusqu'aux conjectures de Weil) :

**Théorème 7.5.4** ([Hin12], Grothendieck-Deligne)**.** Soit $V$ une variété algébrique projective et lisse de dimension $n$.
On associe à la variété algébrique $V$ définie sur $\mathbb{F}_q$ la série formelle suivante :

$$Z(V/\mathbb{F}_q, T) := \exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#V(\mathbb{F}_{q^m})}{m} T^m\Big) \tag{7.9}$$

1) La série formelle $Z(V/\mathbb{F}_q, T)$ est une fraction rationnelle.
2) La fonction $Z(V/\mathbb{F}_q, T)$ vérifie l'équation fonctionnelle suivante :

$$Z(V/\mathbb{F}_q, \frac{1}{q^n T}) = \epsilon q^{n\chi/2} T^{\chi} Z(V/\mathbb{F}_q, T) \tag{7.10}$$

   où $\epsilon = \epsilon_V = \pm 1$ et $\chi = \chi_V$ est un entier.
3) (Hypothèse de Riemann) On peut écrire

$$Z(V/\mathbb{F}_q, T) = \frac{P_1(T) \dots P_{2n-1}(T)}{P_0(T) \dots P_{2n}(T)} \tag{7.11}$$

   avec $P_0(T) = 1 - T$, $P_{2n}(T) = 1 - q^n T$ et

$$P_i(T) = \prod_{j=1}^{b_i} (1 - \alpha_{i,j} T), \text{ et } |\alpha_{i,j}| = q^{i/2} \tag{7.12}$$

4) Les degrés $b_i$ des polynômes $P_i$ peuvent être calculés purement "topologiquement" de même que $\chi = \displaystyle\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i b_i$.

Je rêve de pouvoir comprendre ces "choses" là (et d'aller tellement plus loin) [*Jugendtraum*]. Aujourd'hui, je ne sais pas vraiment où en sont ces "choses" (?).

Il y a aussi des histoires avec le "corps" $\mathbb{F}_1$ pour démontrer l'hypothèse de Riemann (l'idée du pourquoi du comment considérer ça est compréhensible par n'importe qui, le pourquoi du comment ce serait censé marcher est une autre affaire; cf. Alain Connes [CCM08]). (De mémoire, mais vraiment aucune idée, je n'ai jamais étudié, juste survolé des trucs de vulgarisations de haut vol, aucune idée de ce que je dis en fait gné : il y aurait un rapport entre $\mathbb{F}_p$ et la droite d'équation $x = p/2$ dans la démonstration de l'hypothèse de Riemann sur des trucs finis. Apparemment, il se passerait des choses étonnantes avec $\mathbb{F}_1$, et ce serait cool si la "technique" (?) marchait pour $p = 1$ vu que l'on serait sur la droite $x = 1/2$ héhé. Mais bon, rien compris. Oublions.)

### 7.5.5 Fonction elliptique

La première fois que j'ai entendu parler de ça [Izq], j'étais stupéfait. Je me souviens avoir essayé d'expliquer le miracle de la double périodicité à un camarade de première.

L'idée n'est pas de démontrer des choses, juste de découvrir et de s'émerveiller un max!

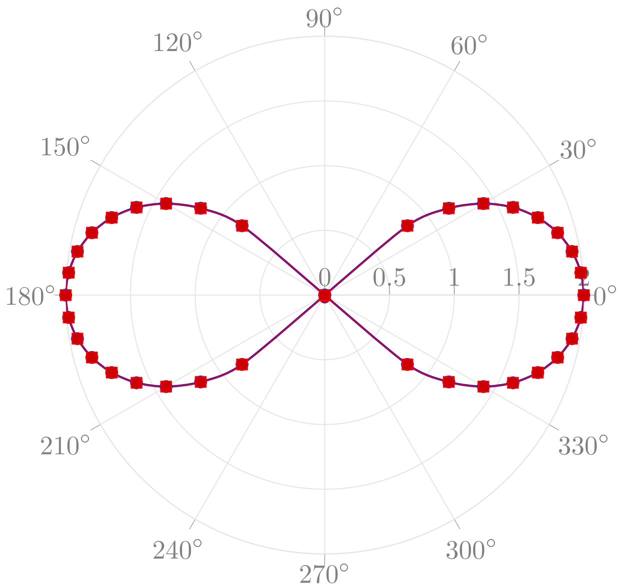
Commençons par une petite présentation historique compilée par Emmanuel Moreau [Mor05] que je me suis permis d'augmenter :

1665 : **Wallis et Newton** : le premier problème fut d'exprimer la longueur d'une ellipse. Des représentations intégrales fleurissent :

$$L_{\text{ellipse}} = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\mathrm{d}t = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2(t)}\mathrm{d}t \tag{7.13}$$

où $e^2 = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$. Le but est d'aller plus loin et de réussir à exprimer $L$ avec des fonctions usuelles... faudra attendre quelques temps pour se rendre compte que ce n'est pas trop possible.

1694 : **Bernoulli** : la fameuse lemniscate de Bernoulli voit le jour et sera apparemment "*l'un des outils principaux dans la découverte des fonctions elliptiques*".




1750 : **Fagnano** : mathématicien amateur apparemment qui parviendra à calculer l'aire définie par la lemniscate de Bernoulli mais dont le calcul de la longueur posait problème. Néanmoins, il parviendra à montrer que :

$$L_{\text{lemniscate}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-(1/2)\sin^2(\theta)}}. \tag{7.14}$$

1751 : **Euler** : lit les travaux de Fagnano [Gol09]. Obtiendra la formule dite *d'addition* et tentera de pousser le travail de Fagnano sur le calcul de $L_{\text{lemniscate}}$ mais ne parviendra pas à aller jusqu'au bout.

1784 : **Lagrange** : a le mérite de définir ce qu'est une intégrale elliptique :

**Définition 7.5.5.** On appelle **intégrale elliptique** une intégrale de la forme $\int R(x,y)\mathrm{d}x$ où $R$ est une fraction rationnelle en $x$ et $y$ et où $y = \sqrt{P(x)}$ où $P$ est un polynôme de degré $3$ ou $4$ sans racine multiple.

1791 : **Gauss** : s'intéresse au calcul de la longueur de la lemniscate de Bernoulli. S'intéresse également à la moyenne arithmético-géométrique de $a$ et $b$ notée $M(a,b)$. Prouve la constructibilité du polygone régulier à $17$ côtés et la loi de réciprocité quadratique. Réussi à exprimer la longueur de la lemniscate :

$$L_{\text{lemniscate}} = \frac{2\pi}{M(1,\sqrt{2})} \tag{7.15}$$

[1] toutefois, ce n'est toujours pas une fonction usuelle.

Introduit le *sinus lemniscatique* ($sl(x)$) et le *cosinus lemniscatique* ($cl(x)$) :

$$sl(x) = G^{-1}(x) \text{ où } G(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} \tag{7.16}$$

$$cl(x) = \tilde{G}^{-1}(x) \text{ où } \tilde{G}(x) = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{7.17}$$

1. Ici l'importance n'est "que" visuelle (gné), mais j'ai un doute sur la formule. Dans le Gourdon [Gou20], par exemple, on a $L_{\text{lemniscate}} = \dfrac{\pi}{2M(\sqrt{2},1)}$ plutôt hé.

Dans le livre [And04], les sinus et cosinus lemniscatiques apparaissent et se pose le problème des relations algébriques que peuvent bien satisfaire les nombres $\Gamma(a)$, $a \in \mathbb{Q}\backslash - \mathbb{N}$, (et de les interpréter dans le contexte des motifs).

Des formules analogues à celles de la trigonométrie classique vont pouvoir être trouvées (addition, multiplication).

1793 : **Legendre** : "*parvient à démontrer que les intégrales elliptiques peuvent se ramener à l'une des trois formes canoniques suivantes*" :

- intégrale elliptique de première espèce :

$$F(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-k^2\sin^2(u)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{7.18}$$

- intégrale elliptique de seconde espèce :

$$E(u) = \int_0^u \sqrt{1-k^2\sin^2(u)}\mathrm{d}u = \int \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x \tag{7.19}$$

- intégrale elliptique de troisième espèce :

$$\Pi(u) = \int_0^u \frac{\mathrm{d}u}{(1+n\sin^2(u))\sqrt{1-k^2\sin^2(u)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+nx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \tag{7.20}$$

1827 : **Abel et Jacobi** : à noter que la période 1827 – 1832 est également celle de la correspondance Jacobi / Legendre [eL75a], [eL75b], [eL75c] et [eL75d].

Abel et Jacobi réaliseront indépendamment des travaux similaires. Jacobi introduit une fonction amplitude $(am(x))$ :

$$am(x) = F^{-1}(x) \text{ où } F(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\theta)}} \tag{7.21}$$

ainsi il définira : $sn(x) = \sin(am(x))$ et $cn(x) = \cos(am(x))$. Les fonctions (thêta) de Jacobi semblent plus commodes que celles de Gauss.

1833 : **Liouville** : "*parvient à montrer que les intégrales elliptiques ne peuvent pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles*".

1858 : **Hermite** : "*prouve que les solutions d'une équation polynomiale de degré* $5$ *peuvent toujours s'exprimer à l'aide des fonctions thêta de Jacobi*".

1864 : **Clebsch** : utilisation de la possibilité de paramétrer toute courbe cubique à l'aide des fonctions elliptiques pour démontrer un théorème de Jacob Steiner [Lê17].

1867 : **Weierstrass** [Wep17] : fonction elliptique de Weierstrass $\wp$ (début de toute une théorie [2]) qui satisfait à l'équation différentielle suivante : $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ [Wal08].

1973 : **Lang** : là ça part totalement en couilles, Serge Lang sort son bouquin *Elliptic functions* [Lan12] et depuis 1867 il a du s'en passer (beaucoup) de choses. Pour le beau jeu, je propose de zieuter le livre de Lang.

(Il semblerait que Riemann avec ses surfaces ait également eu une certaine importance (?). De plus, à noter que Steven Wepster semble avoir des documents intéressants un peu

2. Théorème de Siegel de 1932; Schneider 1936; Masser 1975; Chudnovsky 1976, 1981... cf [Wal08].

cachés sur son page professionnelle. Il y a aussi un texte de Mittag-Buffler [ML23] qui a l'air bien intéressant ! Boh, on a même pas parlé de double périodicité encore, gné. Je ne vais même pas fourrer le nez dans le texte de Weil [Wei99] mais n'oublions pas Kronecker et Eisenstein !!!)

C'est quand même fou que ça ait commencé avec des considérations sur les ellipses et que ça en arrive aujourd'hui à de la théorie algébrique des nombres et cie.

Aujourd'hui, il semblerait que les fonctions elliptiques aient carrément pris un nouveau tournant. Par exemple, dans [Ste99], on trouve cette définition :

**Définition 7.5.6.** An **elliptic function** *with respect to a lattice* $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ in $\mathbf{C}$ is a meromorphic function $f$ on $\mathbf{C}$ that satisfies $f(z+\omega) = f(z)$ for all $\omega \in \Lambda$.

À noter que Lang [Lan12] a une définition qui semble clairement équivalente.

Putain de merde, y'aurait même une fonction zêta de Weierstrass pour le réseau (=*lattice*) $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 + \mathbf{Z}\omega_2$ dans $\mathbf{C}$ :

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega \in \Lambda'} \left( \frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2} \right) \tag{7.22}$$

Apparemment, cette fonction zêta peut se réécrire comme une somme infinie de séries d'Eisenstein (?), richesse richesse !

J'écris ça à la fin, tiens c'est bien le moment..., ce serait peut-être pas si mal de tout reprendre proprement un jour ?! En faisant des calculs et plus que juste présenter deux ou trois choses (en se tapant le livre de Lang [Lan12] par exemple ?) !!!

Il y a notamment un polycopié d'une réunion APMEP (2006) qui a l'air vraiment bien et simple à suivre : [Lar06].

## 7.6 Séries, calculs

### 7.6.1 Lemme de Grönwall

### 7.6.2 Calculs de $\zeta(2)$

### 7.6.3 Introduction aux séries de Fourier

### 7.6.4 Des séries divergentes ?

Je me souviens avoir eu ma période "procédés de normalisations de séries divergentes" (j'avais trouvé un procédé qui semble pouvoir se généraliser pas trop mal). C'était en voyant une vidéo de Science4All [Sci16] que ça avait relativement pris sens (ce que j'essayais de faire n'était pas complètement con, juste déductible mais pas "logiquement logique", pas intuitif). Ensuite, par un heureux hasard, j'ai été en contact avec un chercheur (Clément Sire). On a quelque peu parlé et il m'a dit que le livre de Hardy [Har67] était truffé d'erreurs (j'ai encore du mal à y croire aujourd'hui). Je l'ai pris sur la défensive et aujourd'hui je me demande bien à quel point il a raison. Encore aujourd'hui, je ne sais pas vraiment quoi penser. J'ai envie d'y voir quelque chose de structuré et construit mais je ne vois pas de bases réellement solides qui me permettent d'écarter tout doute.

# 7.7 Tables de dérivées (approfondissements)

# 7.8 Calcul intégral

## 7.8.1 Lemme de Grönwall

## 7.8.2 Young et Hölder

Exercices 184 et 185 issus de [LLG21].

**Exercice 184 (Inégalité de Young)**

Soit $p$ un réel supérieur à $1$.

a) Montrer qu'il existe un unique réel $q$ tel que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{7.23}$$

Vérifier que $q$ (que l'on appelle parfois *exposant conjugué de* $p$) est supérieur à $1$. Déterminer $q$ pour $p = 2$, puis pour $p = 4$.

L'existence de $q$ est intuitivement très évidente. En effet, lorsque l'on travaille dans les réels, il est évident que la différence $1 - \frac{1}{p}$ existe. (Autrement pour le montrer plus formellement, ne pourrait-on pas utiliser le fait que $\mathbb{R}$ soit archimédien combiné au fait qu'il soit complet ou quelque chose comme ça? Sinon on sort directement l'artillerie lourde en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires (vu que la fonction représentant une droite est continue).)

Une fois l'existence montrée, il reste à prouver l'unicité. Pour cela, faisons un raisonnement par l'absurde : supposons qu'il existe $q$ et $q'$ deux exposants conjugués de $p$ différents. Alors :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q'} \tag{7.24}$$

d'où :

$$\cancel{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q} = \cancel{\frac{1}{p}} + \frac{1}{q'} \tag{7.25}$$

on trouve finalement que $q = q'$. Il est donc absurde de les supposer différents, donc ils sont égaux, ainsi $q$ est unique.

Pour démontrer que $q$ est supérieur à $1$, il n'y qu'à manipuler l'expression 7.23 :

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}. \tag{7.26}$$

En inversant, on obtient finalement que $q > \dfrac{p}{p-1}$, ce qui est évidemment supérieur à $1$.

Il reste tout de même deux petites questions : déterminer $q$ si :

- $p = 2$ : $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, d'où $q = 2$.
- $p = 4$ : $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, d'où $q = \frac{4}{3}$.

**b)** On fixe $y$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et on pose :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy. \tag{7.27}$$

Donner le tableau de variations de $f$.

Calculons la dérivée de $f$ (dérivable car somme de fonctions dérivables) :

$$f'(x) = x^{p-1} - y \tag{7.28}$$

Le tableau de variation est alors :

| $x$ | $0^+$ | | $y^{\frac{1}{p-1}}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $f(y^{\frac{1}{p-1}})$ | $\nearrow$ | |

Ainsi, on en déduit que $f(x) \geqslant f(y^{\frac{1}{p-1}})$ pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

**c)** Conclure :

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2, xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \tag{7.29}$$

Évaluons le minimum de $f$ :

$$f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{(y^{\frac{1}{p-1}})^p}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}} y = \frac{y^{\frac{p}{p-1}}}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} \tag{7.30}$$

Or, $\dfrac{p}{p-1} = q$, d'où :

$$f(y^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1}{p-1}+1} = y^q \Big[ \underbrace{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}_{=1} \Big] - y^{\frac{1}{p-1}+1} \tag{7.31}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $\dfrac{1}{p-1}+1=\dfrac{p}{p-1}=q$, d'où : $f(y^{\frac{1}{p-1}})=0$. En somme : $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}^{+*}$. Ce qui permet d'obtenir le résultat escompté.

**Exercice 185 (Inégalité de Hölder pour les intégrales)**

*Les notations $p,q$ sont celles de l'exercice précédent, dont on utilise également le résultat. Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a<b$, $f$ et $g$ deux fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir l'inégalité de Hölder :*

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\left(\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t\right)^{1/q}\tag{7.32}$$

On remarquera que, pour $p=2$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

**a)** En utilisant l'inégalité de Young, montrer, pour $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$ :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{\lambda^p}{p}\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t+\frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t.\tag{7.33}$$

Il suffit de multiplier astucieusement $|f(t)g(t)|$ pour obtenir le résultat en appliquant l'inégalité de Young :

$$|f(t)g(t)|=|\lambda f(t)\frac{g(t)}{\lambda}|\leqslant\frac{|\lambda f(t)|^p}{p}+\frac{|\frac{g(t)}{\lambda}|^q}{q}\tag{7.34}$$

étant donné que $\lambda$ est strictement positif, on peut le sortir des valeurs absolues. Ensuite, on intègre des deux côtés en utilisant la linéarité de l'intégrale pour le côté de droit et le fait que $\left|\int\cdot\right|\leqslant\int|\cdot|$ pour conclure.

**b)** Déterminer le minimum de la fonction :

$$\psi:\lambda\in\mathbb{R}^{+*}\mapsto\frac{\lambda^p}{p}\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t+\frac{1}{q\lambda^q}\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t.\tag{7.35}$$

Conclure.

La fonction $\psi$ est dérivable (car somme de fonctions dérivables), sa dérivée vaut :

$$\psi'(\lambda)=\lambda^{p-1}\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t-\frac{1}{\lambda^{q+1}}\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t\tag{7.36}$$

On cherche (sauvagement) à résoudre l'équation : $\psi'(\lambda)=0$ :

$$\lambda^{p-1}\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t=\frac{1}{\lambda^{q+1}}\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t\tag{7.37}$$

Donc :

$$\lambda^{p+q}=\frac{\displaystyle\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t}\tag{7.38}$$

$$\lambda=\left[\frac{\displaystyle\int_a^b|g(t)|^q\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_a^b|f(t)|^p\mathrm{d}t}\right]^{\frac{1}{p+q}}.\tag{7.39}$$

Et pour finir, calculons $\psi(\lambda)$ :

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{p}\left[\frac{\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t}\right]^{\frac{p}{p+q}} \int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t + \frac{1}{q}\frac{1}{\left[\frac{\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t}{\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t}\right]^{\frac{q}{p+q}}} \int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t. \tag{7.40}$$

Il convient de remarquer que $\dfrac{p}{p+q} = \dfrac{p}{pq(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} = \dfrac{1}{q}$ et $\dfrac{q}{p+q} = \dfrac{q}{pq(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} = \dfrac{1}{p}$.

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{p}\left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1-1/q} + \frac{1}{q}\left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1-1/p}\left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{7.41}$$

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{p}\left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} + \frac{1}{q}\left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}\left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{7.42}$$

$$\psi(\lambda) = \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right] \tag{7.43}$$

D'où finalement l'inégalité de Hölder :

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \psi(\lambda) = \left(\int_a^b |f(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}\left(\int_a^b |g(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \tag{7.44}$$

### 7.8.3 Wallis

Exercice issu d'un devoir maison de la prépa de Béziers.

On pose pour tout entier $n$ les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\mathrm{d}t \text{ et } J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\mathrm{d}t. \tag{7.45}$$

**1.** Montrer que, à l'aide du changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - t$, on a, pour tout entier $n$ :

$$I_n = J_n. \tag{7.46}$$

On nous donne le changement de variable, donc il n'y a qu'à appliquer. Autrement, comment aurait-on pu penser à ce changement de variable ? En voyant que : les bornes sont les mêmes, l'intégrande ne change pas (au sinus transformé en cosinus près), cela nous suggère sans doute qu'il doit bien exister une relation, une formule trigonométrique du type : $\cos(f(t)) = \sin(t)$. Il suffit de prendre $f(t) = \dfrac{\pi}{2} - t$.

Quand on fait un changement de variable : à quoi doit-on penser ? À ne pas s'emmêler les pinceaux dans les variables, à changer l'intégrande et à toucher aux bornes !

On a $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}t$. Ce signe moins va disparaître car le changement de variable intervertit les bornes, et, on va utiliser la formule $\int_a^b f = -\int_b^a f$. On obtient alors :

$$J_n = -\int_{\pi/2}^{0} \sin^n(x)\mathrm{d}x = I_n. \tag{7.47}$$

La variable $x$ de l'intégrale ci-dessus étant muette, on s'en fout et tout roule.

**2.** On étudie désormais la suite $(I_n)$.

**(a)** Calculer $I_0$ et $I_1$.

Calcul de $I_0$ :

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}. \tag{7.48}$$

Calcul de $I_1$ :

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^1(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin(t)\mathrm{d}t = -\cos(\pi/2) - (-\cos(0)) = 1. \tag{7.49}$$

**(b)** Montrer, en posant $\sin^n(t) = \sin(t)\sin^{n-1}(t)$ que :

$$\forall n \geqslant 2, I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{7.50}$$

J'étais parti pour une bonne petite récurrence, mais sans doute qu'avec une (ou plutôt deux) intégrations par parties, ça devrait aller niquel.

**(c)** En déduire :

— $I_8$ et $I_9$ ;

— que l'expression de $I_n$, quand $n$ est pair et en posant $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}$, est :

$$I_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\frac{\pi}{2}; \tag{7.51}$$

— que l'expression de $I_n$, quand $n$ est impair et en posant $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{N}$, est :

$$I_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}. \tag{7.52}$$

**3.** Montrer que la suite $(I_n)$ est positive et décroissante. En déduire que la suite converge.

**4.** Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a :

$$1 \leqslant \frac{I_{n-1}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n-2}}{I_n} \tag{7.53}$$

en déduire alors que :

$$I_n \sim_{+\infty} I_{n-1}. \tag{7.54}$$

**5.** Établir que, pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2}. \tag{7.55}$$

**6.** Montrer enfin que :

$$\boxed{I_n \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}. \tag{7.56}$$

Pour finir, on mentionne simplement quelques liens existants entre intégrales de Wallis et d'autres objets auxquels on ne penserait pas forcément : coefficients binomiaux, formule de Stirling, représentation intégrale de $\pi$, fonction bêta, fonction gamma, intégrale de Gauss...

## 7.9 Équations différentielles

### 7.9.1 Lemme de Grönwall

### 7.9.2 Équations différentielles à variables séparables

### 7.9.3 Équation différentielle d'Euler

### 7.9.4 Équation différentielle de Bernoulli

### 7.9.5 Équation différentielle de Riccati

### 7.9.6 Équation différentielle de Lagrange et Clairaut

### 7.9.7 Équations de Legendre et de Bessel

### 7.9.8 Système de Lotka-Volterra

### 7.9.9 Pendule sans et avec frottement

### 7.9.10 Un peu d'astronomie

### 7.9.11 Introduction à une équation aux dérivées partielles hyper-classique : l'équation de la chaleur

## 7.10 Quelques exemples d'équations aux dérivées partielles simples et idées

## 7.11 Que la force soit avec $f$

## 7.12 Dérivée discrète



## 7.13 Logarithme discret

Si $m_1$ et $m_2$ sont deux entiers tels que $m_1 \leqslant m_2$, on désigne par $[\![m_1, m_2]\!]$ l'ensemble des entiers $k$ tels que $m_1 \leqslant k \leqslant m_2$.

Si $a, b$ et $n$ sont trois entiers, on note $a = b \pmod{n}$ lorsque $a$ et $b$ sont congrus modulo $n$, c'est-à-dire lorsque $b - a$ est multiple de $n$.

Dans tout cet exercice, $p$ désigne un nombre premier.

## I – Définition du logarithme discret

Pour tout $A \in \mathbb{N}$, on note $(A \bmod p)$ le reste de la division euclidienne de $A$ par $p$. C'est l'unique entier de $[\![0, p-1]\!]$ congru à $A$ modulo $p$.

Un entier $x \in [\![1, p-1]\!]$ est appelé **racine primitive modulo** $p$ lorsque l'ensemble des $(x^k \bmod p)$ pour $k \in \mathbb{N}$ est l'ensemble $[\![1, p-1]\!]$, c'est-à-dire lorsque les puissances de $x$, calculées modulo $p$, décrivent $[\![1, p-1]\!]$ tout entier.

Ainsi, pour $p = 5$ :

- $1$ n'est pas racine primitive modulo $5$ puisque ses puissances valent toujours $1$.
- $2$ est racine primitive modulo $5$, puisque :

$$(2^0 \bmod 5) = 1, (2^1 \bmod 5) = 2, (2^2) \bmod 5) = 4, (2^3 \bmod 5) = 3. \qquad (7.57)$$

- $3$ est racine primitive modulo $5$ puisque :

$$(3^0 \bmod 5) = 1, (3^1 \bmod 5) = 3, (3^2 \bmod 5) = 4, (3^3 \bmod 5) = 2. \qquad (7.58)$$

- $4$ n'est pas racine primitive modulo $5$ puisque $(4^k \bmod 5)$, $k \in \mathbb{N}$, vaut alternativement $1$ ou $4$.

**1.** On prend dans cette question $p = 7$. Déterminer les racines primitives modulo 7.

Un tableau s'impose. Il n'y a qu'à faire tous les calculs.

*On admet désormais que, quel que soit le nombre premier $p$, il existe au moins une racine primitive modulo $p$. Dans la suite, on désigne par $g$ une racine primitive modulo $p$.*

Essayons tout de même de démontrer ce résultat, je n'ai aucune idée de s'il est difficile ou pas.

**2. (a)** Montrer que l'ensemble des $(g^k \bmod p)$, pour $k \in [\![0, p-2]\!]$ est $[\![1, p-1]\!]$

**2. (b)** Soit $A \in [\![1, p-1]\!]$. Justifier l'existence et l'unicité d'un entier $a \in [\![0, p-2]\!]$ tel que $A = (g^a \bmod p)$.

## II – Calcul du logarithme discret par la méthode d'Adleman

AAAAAA FAIRRRE

## 7.14 Abel, Cesàro, Silverman-Toeplitz

## 7.15 Fubini et les sommes ; théorème de sommation par paquet

## 7.16 Stabilité géométrique

Chapitre 8

# Probabilités

## 8.1 Vecteurs et matrices aléatoires

## 8.2 Marches aléatoires

## 8.3 Fonction d'onde

# Chapitre 9

# Arithmétique

## 9.1 Crible des nombres premiers

## 9.2 Fonctions de comptage

## 9.3 Triplets pythagoriciens

## 9.4 Grand théorème de Fermat, $n = 3$

## 9.5 Polynôme de Polya et théorème de Moreau-Jablonski

## 9.6 Introduction au théorème des nombres premiers

## 9.7 Nombres pointus

## 9.8 Les premiers sont les derniers

# Chapitre 10

# Exotique – autres

## 10.1 Vers les récurrences faibles, fortes et au-delà

Au lycée, c'est bien la première fois que l'on flirte avec l'infini. La démonstration par récurrence est une manière de démontrer une propriété pour une infinité de nombre à condition de montrer une certaine implication (ainsi qu'une initialisation ; le fameux couple **initialisation / hérédité**). Toutefois, il existe plein de types de récurrences, chacune adaptée à sa situation. Les récurrences fortes sont un exemple mais sont loin d'être les seules ! Il existe même des raisonnements analogues (méthode de descente...).

## 10.2 *Pigeonhole principle*

## 10.3 Introduction à la théorie des nœuds

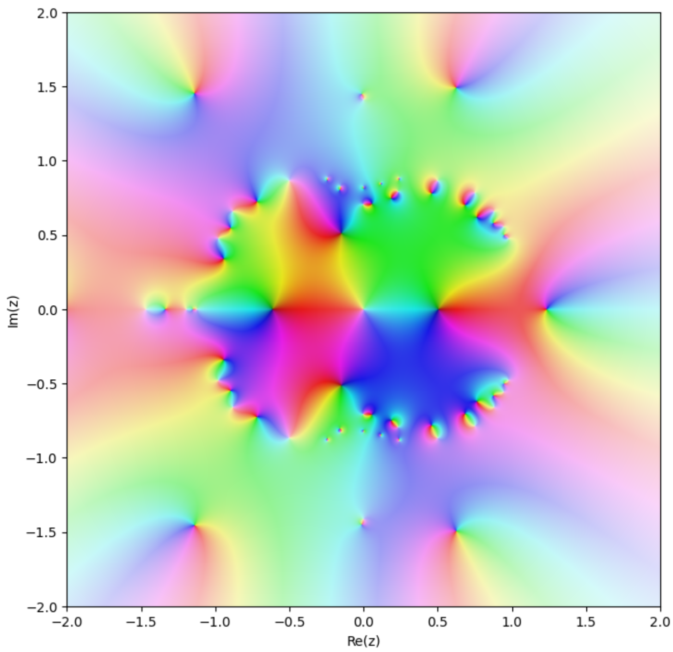
## 10.4 Introduction aux équations fonctionnelles

## 10.5 Introduction aux spécificités de l'analyse complexe

## 10.6 Introduction à la dynamique holomorphe

On se base sur quatre documents pour approcher ce domaine : une sorte d'introduction historique (dans son sens pratique) des systèmes dynamiques holomorphes par Étienne Ghys, une introduction par d'anciens élèves de l'ÉNS de Lyon (je suppose) [ePR94], une sorte de survol [eVL10] et un cours [Canue].

Maintenant que j'ai compris comment faire des rendus graphiques tout beaux tout jolis, je ne vais pas m'en priver !




(Ça provient de l'étude de *choses* qui peuvent être considérées comme des séries hypergéométriques, au sens de E. Goursat.)

# Partie IV

# Études et développements – Licence 1

Il faut que je me rende compte de ce que je veux vraiment : un cours parfaitement dactylographié [1] ou bien faire des mathématiques (et, *a fortiori*, de la recherche) ? Dans les parties précédentes, j'avais "vraiment le temps" de prendre mon temps et de faire de longs commentaires pour de petites choses. Désormais, tout va aller très vite, d'autant plus si j'y envie de plancher sur de petites recherches. On va essayer d'allier l'utile à l'agréable !

On garde évidemment la dactylographie de cours (en allant à l'essentiel de l'essentiel) ! Avec le temps gagné, on va donner d'autant plus d'importance aux parties dites de *développements* : ce serait bien d'en faire une (bien) grosse par année et beaucoup de petites (c'est-à-dire essayer de conduire une "grosse" recherche par an (e.g. modélisation et résolution numérique d'équations différentielles, algèbres de Lie, transport optimal...) tout en s'autorisant à faire de petits développements au gré du vent (e.g. calcul du nième terme d'une série très compliquée, calcul d'intégrales assez compliquées, un bon petit théorème de géométrie...)).

Si je pouvais être encadré pour les gros projets ce serait niquel ! L'idée n'est pas d'aller dans des zones dont je sais déjà 1) que je les apprécie et surtout étant 2) inaccessibles et donc partir dans une direction trop ardue (rester réaliste).

C'est juste une idée mais : ce n'est pas impossible que je parte sur les cinq premiers chapitres de [Lee13] pour le premier "gros" développement (*Smooth Manifolds*, *Smooth Maps*, *Tangent vectors*, *Submersions, Immersions, and Embeddings*, *Submanifolds*). Mais ça semble demander bien trop de pré-requis !

En deuxième idée, il y a bien [Gru07] auquel j'avais déjà pensé. J'aimerais bien le travailler sérieusement, peut-être que s'y intéresser dès la première année est un peu tôt... à voir. Faire les deux premières : *Convex functions* et *Convex Bodies* (voire même la troisième : *convex Polytopes*) serait franchement bien ! L'idée est d'essayer de chercher des choses et non de simplement faire un apprentissage. Néanmoins, en première année... on fera ce que l'on pourra !

En tout cas l'article de Gruber lui-même [Gruue] m'enthousiasme !!! Sans beaucoup d'étonnement, il semblerait que certaines questions de géométries discrètes et convexes puissent avoir un lien avec la géométrie algébrique (héhé [2]).

1. Je ne rédige pas un manuel là !
2. Voir par exemple :

> ([ein14]) *Upper bound theorem for spheres and the $g$-conjecture – This is a breathtaking application of commutative algebra and algebraic geometry to convex polytopes (and more generally spheres). If you want to learn from the master himself, have a look at Stanley's book "Combinatorics and commutative algebra".*

ou

> ([mak14]) *Theory of toric varieties is a link between convex geometry and algebraic geometry. To any convex $n$-dimensional polytope in $\mathbb{R}^n$ one constructs a complex projective variety of complex dimension $n$ with action of the complex torus $(\mathbb{C}^*)^n$. This action has finitely many orbits, in fact as many as there are faces of the polytope. Moreover one can establish 1-1 correspondence between faces and orbits. It is established via the so called moment map which maps the toric variety to the polytope. Based on this connection, there is a number of results obtained about combinatorics of polytopes using the methods of algebraic geometry, e.g. McMullen's conjecture on h-vector proved by Stanley. There is a book on this and other material "Convex bodies and algebraic geometry" by T. Oda.*

Plus généralement, il semblerait possible de trouver des connexions et ponts avec la théorie des nombres, la géométrie différentielle, l'*integral geometry*, topologie et combinatoire...

Ou pas... ou pas... Je vais partir dans une certaine direction mais de manière plus "étudiée".

Donc, que vais-je faire ? Je finis ce document durant les grandes vacances (c'est-à-dire les trois premières parties) et je continue l'aventure dans un autre document, avec une autre utilité, formulé d'une autre manière, dans un autre but. Je vais plus ou moins reprendre la même logique mais avec un objectif différent : l'idée ne sera plus de tout reprendre et tout revoir mais de s'intéresser à tout ce qui pourrait avoir un intérêt en vue de se diriger vers le **programme de Langlands**... Je vais partir *ex nihilo* et au fil des années continuer à construire et développer le bins ! Allez, bonne chance petit !

# Bibliographie


[AF04] T. Andreescu and Z. Feng. *103 Trigonometry Problems : From the Training of the USA IMO Team.* Birkhäuser Boston, 2004.

[Ale04] F. Alekseev, V.B. et Aicardi. *Abel's Theorem in Problems and Solutions : Based on the lectures of Professor V.I. Arnold.* Kluwer International Series in. Springer Netherlands, 2004.

[Ale18] Raphaël Alexandre. Géométrie contemporaine. mémoire de master. *École Normale Supérieure, Université Paris VII*, 2018.

[And04] Y. André. *Une introduction aux motifs : motifs purs, motifs mixtes, périodes.* Panoramas et synthèses - Société mathématique de France. Société mathématique de France, 2004.

[And15] Alexandre André. Règles françaises de typographie mathématique. *sgalex.free.fr*, 2015.

[AV18] D. Aubin and C. Viterbo. *L'élite sous la mitraille : les normaliens, les mathématiques et la Grande Guerre : 1900-1925.* Collection Figures normaliennes. Éditions Rue d'Ulm, 2018.

[Awo05] Steve Awodey. Category theory. *Carnegie Mellon University*, 2005.

[BAG+06] N. Bourbaki, M. Artin, A. Grothendieck, P. Deligne, and J.L. Verdier. *Theorie des Topos et Cohomologie Etale des Schemas. Seminaire de Geometrie Algebrique du Bois-Marie 1963-1964 (SGA 4) : Tome 1.* Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[Bag21] Joan Bagaria. Set Theory. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, Winter 2021 edition, 2021.

[BB+16] A. Bodin, B. Boutin, M.B. ), G. Chen, S. Chemla, P.R. ), and L. Thomas. *Algèbre : cours de mathématiques première année.* [Livres Exo7]. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2016.

[Ber] C. Bertault. Une identité remarquable au service du groupe des inversibles de z/pz.

[Ber18] G. Berhuy. *Algèbre : le grand combat.* Mathématiques en devenir. Calvage et Mounet, 2018.

[BF06] Éva Bayer-Fluckiger. Hermann Minkowski, grand prix de l'Académie des sciences à 18 ans. In *Un texte un mathématicien (Cycle de conférences)*. Société Mathématique de France – S.M.F., 2006.

[BF11] A. Bonfiglioli and R. Fulci. *Topics in Noncommutative Algebra : The Theorem of Campbell, Baker, Hausdorff and Dynkin*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2011.

[Biq11] Olivier Biquard. L3 – algèbre 1. notes de cours. *ÉNS – DMA*, 2011.

[BM91] A.J. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Wiley, 1991.

[Bom] E. Bombieri. Problems of the millennium : the riemann hypothesis.

[Bom19] Enrico Bombieri. New progress on the zeta function : From old conjectures to a major breakthrough. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 116(23) :11085–11086, 2019.

[Bon09] Valère Bonnet. Cours de mathématiques – première. *Lycée PONTUS DE TYARD*, 2009.

[Borue] V. Borrelli. Cm-s5 : Le théorème de gauss-bonnet. *Université de Lyon*, Année de publication inconnue.

[Bou97] Nicolas Bouleau. *Dialogues autour de la création mathématique*. Association Laplace-Gauss, 1997.

[Bou07a] N. Bourbaki. *Intégration : Chapitre 5*. Bourbaki, Nicolas. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Bou07b] N. Bourbaki. *Intégration : Chapitre 6*. Bourbaki, Nicolas. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Bou07c] N. Bourbaki. *Intégration : Chapitre 9 Intégration sur les espaces topologiques séparés*. Bourbaki, Nicolas. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Bou07d] N. Bourbaki. *Intégration : Chapitres 1 à 4*. Bourbaki, Nicolas. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Bou07e] N. Bourbaki. *Intégration : Chapitres 7 à 8*. Bourbaki, Nicolas. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Bou07f] Nicolas Bourbaki. *Théorie des ensembles*. Actualités scientifiques et industrielles. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[BW95] M. Barr and C. Wells. *Category Theory for Computing Science*. Number v. 1 in Prentice-Hall international series in computer science. Prentice Hall, 1995.

[Canue] S. Cantat. Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux. existence, exemples, rigidité. *univ-rennes1.fr*, Année inconnue.

[Car18] Xavier Caruso. Polynômes de Ore en une variable. *HAL*, 2018.

[CCM08] Alain Connes, Caterina Consani, and Matilde Marcolli. *Fun with F1.* arXiv, 2008.

[Cha22] Chaurien. Prouver une équivalence (fausse ?). *les-mathematiques.net*, 2022.

[Col02] Pierre Colmez. Arithmétique de la fonction zêta. *Journées mathématiques X-UPS*, 2002.

[Col11] Pierre Colmez. *Éléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres).* Mathématiques (École polytechnique (France)). Éd. de l'École Polytechnique, 2011.

[Cuc08] Roger Cuculière. Intégrale de hardy. *Lycée Pasteur, 92200, Neuilly-sur-Seine*, 2008.

[Deh17] Patrick Dehornoy. *La théorie des ensembles : introduction à une théorie de l'infini et des grands cardinaux.* Tableau noir. Calvage & Mounet, 2017.

[Dem07] Jean-Pierre Demailly. Théorie élémentaire de l'intégration : l'intégrale de henstock-kurzweil. *Université Joseph Fourier Grenoble I*, 2007.

[Die80] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal.* Collection Méthodes. Hermann, 1980.

[Die87] Jean Dieudonné. *Pour l'honneur de l'esprit humain : les mathématiques aujourd'hui.* Histoire et philosophie des sciences. Hachette, 1987.

[dMa] François de Marçay. Fonction gamma d'euler et fonction zêta de riemann.

[dMb] François de Marçay. Intégrale de riemann.

[Dup19] Clément Dupont. Valeurs zêta multiples. In *Périodes et transcendance*. École Polytechnique, Cycle de conférences, 2019.

[dV97] Yves Colin de Verdière. Une introduction à la topologie : graphes, surfaces et noeuds. *Institut Fourier*, 1997.

[Edw20] Joseph Edwards. *A Treatise on the Integral Calculus ; with Applications, Examples and Problems (Volume I).* Alpha Editions, 2020.

[eECdV98] G. Benabou et E.-C. de Verdière. Résolution des équations de degré 5. *Sous la direction de Yves Laszlo*, 1998.

[ein14] eins6180. Approaching convex and discrete geometry from other disciplines. *MathOverflow*, 2014.

[eL75a] Jacobi et Legendre. Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 8 :287–303, 1875.

[eL75b] Jacobi et Legendre. Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 9 :38–47, 1875.

[eL75c] Jacobi et Legendre. Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 9 :51–95, 1875.

[eL75d] Jacobi et Legendre. Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 9 :126–142, 1875.

[ePR94] Jean-Yves Briend et Pascale Roesch. Une introduction aux systèmes dynamiques holomorphes. *Le journal de maths des élèves, Volume 1. No 2.*, 1994.

[eSM45] Samuel Eilenberg et Saunders MacLane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58(2) :231 – 294, 1945.

[eVL10] J. Bled et V. Lambert. Dynamique holomorphe : Fatou et julia au pays des fractales. *ÉNS Cachan Bretagne, Université de Rennes 1*, 2010.

[Fey18] Jean Feydy. *Cours de culture mathématique. Fondations, Analyse, Géométrie et Applications.* DMA de l'ÉNS, 2017 – 2018.

[Fey19] Jean Feydy. Introduction à la géométrie riemannienne par l'étude des espaces de formes. *ÉNS Ulm*, 2019.

[FH07] R. Fitzpatrick and J.L. Heiberg. *Euclid's Elements.* Richard Fitzpatrick, 2007.

[Fok94] Maarten M. Fokkinga. A gentle introduction to category theory – the calculational approach. *University of Twente, dept. INF, Netherlands*, 1994.

[Fre19] Javier Fresàn. Une introduction aux périodes. In *Périodes et transcendance.* École Polytechnique, Cycle de conférences, 2019.

[FS18] Brendan Fong and David I Spivak. Seven sketches in compositionality : An invitation to applied category theory. *arXiv*, 2018.

[Gar22] M. Garnier. *Surroundings of Fourier analysis : An attempt to do Algebra. From a general mathematical introduction to harmonic analysis. Autonomous research dissertation in (Mostly) Pure Mathematics.* Non fini (plan seulement), 2022.

[GBGL$^+$08] T. Gowers, J. Barrow-Green, I. Leader, Princeton University, and Amazon.com (Firm). *The Princeton Companion to Mathematics.* Academic Search Complete. Princeton University Press, 2008.

[Gil12a] Nick Gill. The finite simple groups i : Description. *https ://nickpgill.github.io/*, 2012.

[Gil12b] Nick Gill. The finite simple groups ii : Proof of the classification. *https ://nickpgill.github.io/*, 2012.

[God69] Roger Godement. *Cours d'algèbre.* Collection Enseignement des sciences. Hermann, 1969.

[Gol09] Catherine Goldstein. Fonctions et intégrales elliptiques. *webusers.imj-prg.fr*, 2009.

[Gou20] X. Gourdon. *Les maths en tête. Analyse - 3e édition.* Ellipses, 2020.

[Gou21] Xavier Gourdon. *Les maths en tête. Algèbre et probabilités.* Editions Ellipses, 2021.

[Gro65] A. Grothendieck. Introduction au langage fonctoriel. *Faculté des Sciences d'Alger*, 1965.

[Gro86] Alexandre Grothendieck. *La Clef Des Songes.* Verlag nicht ermittelbar, 1986.

[Gro21] A. Grothendieck. *Récoltes et semailles : réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien.* Collection Tel. Gallimard, 2021.

[Gru07] P.M. Gruber. *Convex and Discrete Geometry.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[Gruue] P.M. Gruber. Convex and discrete geometry : Ideas, problems and results. *dmg.tuwien.ac.at*, Année inconnue.

[Hal98] Paul Richard Halmos. *Naive Set Theory.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1998.

[Har67] G.H. Hardy. *Divergent Series.* Oxford university press. Clarendon Press, 1967.

[Hin12] Marc Hindry. La preuve par andré weil de l'hypothèse de riemann pour une courbe sur un corps fini. *Journées mathématiques X-UPS*, 2012.

[hma16] hmakholm. Are there any objects which aren't sets? Mathematics Stack Exchange, 2016. URL :https ://math.stackexchange.com/q/1709439 (version : 2016-03-22).

[Hob19] E.W. Hobson. *A Treatise on Plane Trigonometry.* Alpha Editions, 2019.

[Hor20] Pierre-Jean Hormière. Catégories et foncteurs. *lescoursdemathsdepjh.monsite-orange.fr*, 2020.

[Hue87] Gérard Huet. Initiation à la théorie des catégories. *INRIA*, 1987.

[Hul13] D. Hulin. Fonctions holomorphes. *L3 MFA, Université Paris-Sud*, 2013.

[Igu07] J. Igusa. *An Introduction to the Theory of Local Zeta Functions.* AMS/IP studies in advanced mathematics. American Mathematical Society, 2007.

[IV14] Henri IV. Cours de terminale. *Henri IV*, 2014.

[Izq] Alberto Tomas Pérez Izquierdo. Génies des mathématiques - poincaré, l'invention de la topologie ; genios de las matematicas.

[KJJ15] Manuel Kauers, Maximilian Jaroschek, and Fredrik Johansson. *Ore Polynomials in Sage*, pages 105–125. Springer International Publishing, Cham, 2015.

[Kni18] Oliver Knill. Some fundamental theorems in mathematics. *arXiv*, 2018.

[Kowue] E. Kowalski. Exponential sums over finite fields : elementary methods. *AMS Open Math Notes : Works in Progress*, Date de publication inconnue.

[Kre18] M. Kreh. *A Link to the Math : Connections Between Numbers Theory and Other Mathematical Topics.* Universität Hildesheim, 2018.

[Kri14] J.-L. Krivine. Logique et théorie axiomatiques. *Université Paris 7. IRIF.*, 2014.

[Krö04] Ralf Krömer. *La théorie des catégories : ses apports mathématiques et ses implications épistémologiques : un hommage historico-philosophique*. Theses, Université Nancy 2, May 2004. Texte intégral accessible uniquement aux membres de l'Université de Lorraine.

[Krö06] Ralf Krömer. La "machine de Grothendieck", se fonde-t-elle seulement sur des vocables métamathématiques ? Bourbaki et les catégories au cours des années cinquante. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 12 :111–154, 2006.

[Laf16] Laurent Lafforgue. L'enseignement des Mathématiques. In *Séminaire "Quel enseignement secondaire pour le XXIe siècle ?"*. École professorale de Paris, Fondation Lettres & Sciences, 2016.

[Laf19] Laurent Lafforgue. 2/5 : Les mathématiques et le logos. In *Les Inquisitoriales*. Le Rouge & le Noir, 2019.

[Lai14] Pierre Lairez. *Périodes d'intégrales rationnelles : algorithmes et applications*. Theses, École polytechnique, November 2014.

[Lan12] S. Lang. *Elliptic Functions*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012.

[Lar06] F. Laroche. Fonctions elliptiques. *Réunion APMEP*, 2006.

[Lee13] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013.

[Leh17] Hervé Lehning. *Toutes les mathématiques du monde*. Flammarion, 2017.

[Lei16] Tom Leinster. Basic category theory. *arXiv*, 2016.

[LLG21] LLG. *Entre la Terminale et les CPGE scientifique*. Lycée Louis Le Grand, 2021.

[Lê17] François Lê. Le paramétrage elliptique des courbes cubiques d'alfred clebsch. *Université Claude Bernard Lyon 1, CNRS UMR 5208, Institut Camille Jordan*, 2017.

[mak14] makt. Approaching convex and discrete geometry from other disciplines. *MathOverflow*, 2014.

[Mal16] Jean Malgoire. Un héritage mathématique fertile. *Pour la Science*, 2016.

[Max21] Maxtimax. Catégories : casser quelques malentendus. *les-mathematiques.net*, 2021.

[Mil17] Paul Milan. Table d'intégrales. *lyceedadultes.fr*, 2017.

[Mil19a] Paul Milan. Suites numériques. *lyceedadultes.fr*, 2019.

[Mil19b] B. Milewski. *Category Theory for Programmers (Scala Edition, Paperback)*. Blurb, Incorporated, 2019.

[Mil21] James S. Milne. Group theory (v4.00). *www.jmilne.org/math/*, 2021.

[ML23] Gosta Mittag-Leffler. An introduction to the theory of elliptic functions. *Annals of Mathematics*, 24(4) :271–351, 1923.

[Mor05] Emmanuel Moreau. La découverte des fonctions elliptiques. *Feuille de Vigne, Université de Bourgogne – UFR Sciences et Techniques*, 2005.

[MSE] MSE. If $ab = i$ then $ba = i$. URL :https ://math.stackexchange.com/q/3852 (version : 2018-08-18).

[O'S06] M. O'Searcoid. *Metric Spaces*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London, 2006.

[OYV08] O.A.I.N.Y.N.V.M.K. O. Ya. Viro. *Elementary Topology*. American Mathematical Soc., 2008.

[Pau09] F. Paulin. Topologie algébrique élémentaire. *Formation Interunversitaire de Mathématiques Fondamentales et Appliquées, Cours de première année de mastère, École Normale Supérieure*, 2009.

[Perue] D. Perrin. Axiomatique d'euclide, convexité, géométries non euclidiennes. *imo.universite-paris-saclay.fr*, Année inconnue.

[Poi52] Henri Poincaré. *Science and hypothesis*. Dover Books Explaining Science and Mathematics. Dover, 1952.

[Pro19] Alain Prouté. *Introduction à la logique catégorique, Deuxième version corrigée et augmentée*. Equipe de Logique Mathématique, UMR 7056 du CNRS, Université Denis Diderot-Paris 7, 2019.

[Pé08] Olivier Péault. Cours de mathématiques – première. *philippelopes.free.fr*, 2008.

[RD09] W. Rudin and J. Dhombres. *Analyse réelle et complexe : cours et exercices*. Sciences sup. Dunod, 2009.

[RG11] C. Lassueur R. Guglielmetti, D. Zaganidis. Introduction à la théorie des catégories et aux lemmes de diagrammes. *École Polytechnique Fédérale de Lausanne*, 2011.

[Rie14] Emily Riehl. Category theory in context. *Cambridge University Press*, 2014.

[Riv03] Tanguy Rivoal. Valeurs aux entiers de la fonction zêta de riemann. *Quadrature*, 2003.

[Rou06] Jean-Louis Rouget. Lionel schwartz. *math.univ-paris13.fr*, 2006.

[Rou18] Jean-Louis Rouget. Matrices. *maths-france.fr*, 2018.

[Rus17] E. Russ. Inégalités isopérimétriques et isodiamétriques. *Université Grenoble Alpes, CNRS UMR 5582*, 2017.

[Sat10] Jean-Christophe San Saturnino. Introduction au langage des catégories, séminaire étudiant. *Équipe Émile Picard, Université Paul Sabatier, Toulouse III*, 2010.

[Sav14] I. Savov. *No bullshit guide to math and physics.* Minireference Company, 2014.

[Sci16] Science4All. La supersommation linéaire, stable et régulière. *Youtube*, 2016.

[SK06] Jean-Pierre Serre and Marc Kirsch. *Jean-Pierre Serre : Mon premier demi-siècle au Collège de France.* The Abel Prize. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[Ste99] P. Stevenhagen. Elliptic functions. *Faculteit Wiskunde en Informatica, Universiteit van Amsterdam*, 1999.

[Str08] P. Strock. Les polynômes de zernike – annexe des études sur l'interférométrie. *strock.pi.r2.3.14159.free.fr*, 2008.

[Tao13] Terry Tao. Are there proofs that you feel you did not understand; for a long time? *MathOverflow*, 2013.

[Tao20] Terence Tao. *Analysis I : Third Edition Book by Terence Tao.* Independently Published, 2020.

[Tro21a] Alain Troesch. *Cours de mathématiques. Partie III – Algèbre 1. MP2I.* Louis Le Grand, 2021.

[Tro21b] Alain Troesch. *Cours de mathématiques. Partie III – Algèbre. MPSI.* Louis Le Grand, 2021.

[Tu04] Loring W. Tu. A short proof of the campbell-hausdorff formula. (une courte démonstration de la formule de campbell-hausdorff.). *Journal of Lie Theory*, 14(2) :501–508, 2004.

[Tuy16] Rémy Tuyéras. Sketches in higher category theory. *Macquarie University, Sydney, Australia*, 2016.

[use] user39898. Possible to have a continuous sequence? Mathematics Stack Exchange. URL :https ://math.stackexchange.com/q/326709 (version : 2013-03-10).

[Vil13] Cédric Villani. *Théorème vivant.* Le Livre de poche. Librairie générale française, 2013.

[Vil15] Cédric Villani. La théorie synthétique de la courbure de Ricci. In *Cycle de conférences*. IHES, 2015.

[Wac21] J. Wacksmann. *Spécialité Mathématiques - Terminale - Pour aller plus loin en démontrant et en s'entraînant - Nouveaux programmes.* Editions Ellipses, 2021.

[Wal08] Michel Waldschmidt. Elliptic Functions and Transcendence. In *Surveys in Number Theory*, Developments in Mathematics 17, pages 143–188. Springer Verlag, 2008.

[Wei99] A. Weil. *Elliptic Functions According to Eisenstein and Kronecker.* Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1999.

[Wep17] Steven Wepster. Elliptic functions and elliptic curves : 1840 – 1870. *webspace.science.uu.nl*, 2017.

[WW13] Charles Wells and Peter Wells. A handbook of mathematical discourse. *abstractmath.org*, 2013.

[Yam10] Go Yamashita. *A proof of the ABC Conjecture after Mochizuki.* RIMS Kôkyûroku Bessatsu, 2010.

[Yca11] Bernard Ycart. Calcul matriciel. *Maths En Ligne, Université Joseph Fourier*, 2011.

[Zag99] Don Zagier. From quadratic functions to modular functions. *Max-Planck-Institut für Mathematik de Bonn*, 1999.

[Zek10] R. Zekri. Cours de topologie. master 1. *Aix-Marseille Université*, 2010.