Introduction à l'algèbre différentielle

Au début d'un de leur cours, Peter Scholze et Dustin Clausen citent David Mumford : «*[Algebraic geometry] seems to have acquired the reputation of being esoteric, exclusive, and very abstract, with adherents who are secretly plotting to take over all the rest of mathematics. In one respect this last point is accurate*». On ne va pas faire ici de la géométrie algébrique, quoiqu'il soit possible de parvenir jusqu'à quelques unes de ses ramifications... Néanmoins, l'entrée et la mise en branle de l'algèbre et de sa mécanique va nous permettre de conquérir des paysages que l'on pouvait penser déraisonnablement loin et inaccessibles à l'algèbre. Un exemple de première mesure est le théorème de Liouville où l'algèbre différentielle explique l'obstruction à ce que certaines fonctions n'admettent pas de primitives dites élémentaires. Notre but sera celui ci : faire accoster l'algèbre en des rivages qui peuvent lui paraître étrangers. Une attention toute particulière sera portée à ce que tous les détails soient précautionneusement traités. Néanmoins, des erreurs plus ou moins flagrantes et graves pourront subsister. Elles sont le fait de l'auteur et grand joie lui ferait d'apprendre leur existence. Ne pas hésiter tout signalement d'erreur, d'imprécision ou encore toute remarque, développement.

1. Définitions et propriétés élémentaires

Dans la suite, k désignera invariablement un corps (plus de précisions proviendront du contexte).

Définition 1. *Un* ***anneau différentiel*** (A, ∂) *est un anneau commutatif unitaire* A *muni d'une dérivation* $\partial : A \to A$ *vérifiant, pour tous éléments* f *et* g *de* A *:*

$$\partial(f+g) = \partial(f) + \partial(g), \qquad \partial(fg) = \partial(f)g + f\partial(g). \tag{1}$$

Lorsque A *est un corps, on parlera alors du* ***corps différentiel*** (A, ∂)*. De manière identique si* A *est un* k*-espace vectoriel, on parlera de l'****espace vectoriel différentiel*** (A_k, ∂)*. Plus généralement, on comprend alors comment construire une* ***structure algébrique différentielle****.*

Assurons nous tout d'abord que cette notion fasse sens et qu'elle existe. Pour cela arrêtons nous sur différents exemples.

1.1. Exemples.

1.1.1. *Dérivation triviale.* La moins intéressante, bien évidemment ! Elle est définie pour tout anneau (commutatif et unitaire) A et vaut 0 en toutes circonstances. Néanmoins, son existence nous rassure au plus haut point. Nous aurons l'occasion d'y revenir plus tard mais, par exemple, sans la dérivation triviale, l'ensemble de toutes les dérivations sur un corps commutatif k ne formerait pas un k-espace vectoriel.

Défi 2. *Montrer que la seule dérivation possible sur* $\mathbf{Z}$ *ou* $\mathbf{Q}$ *est la dérivation triviale.*

Soit ∂ une dérivation sur $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$. On souhaite montrer que pour tout élément x de $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$, on a $\partial(x) = 0$. En d'autres termes, on souhaite montrer que le noyau de ∂ est $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Q}$. Plus généralement, soit $\partial : A \to A$ une dérivation, peut-on caractériser les anneaux A tels que $\ker(\partial) = A$? Nous reviendrons sur cette question lorsque l'on introduira l'anneau ou le corps des constantes d'une dérivation.
Commençons par remarquer que $\partial(0+0) = \partial(0) = \partial(0) + \partial(0)$. Donc $\partial(0) = 0$. De plus, $0 = \partial(0) = \partial(x-x) = \partial(x) + \partial(-x)$. De fait, restreindre le problème à un élément de $\mathbf{Z}_+$ ou $\mathbf{Q}_+$ ne fait perdre aucune généralité. On constate que $\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = \partial(1)1 + 1\partial(1)$. Donc $\partial(1) = 0$. Finalement, pour $n \in \mathbf{Z}_+$, comme $\partial(n) = \partial(n-1+1) = \partial(n-1) + \partial(1)$, c'est-à-dire $\partial(n-1) = \partial(n)$, on peut en déduire que la seule dérivation possible sur $\mathbf{Z}$ est la dérivation triviale. C'est à peu près le même combat que l'on doit mener sur $\mathbf{Q}$. Restreignons de nouveau à $\mathbf{Q}_+$ sans perte de généralité et soit $x = p/q$ un élément de cet ensemble (avec $p \in \mathbf{Z}_+$ et $q \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$). Alors $\partial(x) = \partial(p/q) = \partial(p)1/q + p\partial(1/q)$. Or, on vient d'obtenir que $\partial(p) = 0$. Pour conclure, il suffit d'écrire que $0 = \partial(1) = \partial(q/q) = \partial(q)1/q + q\partial(1/q)$ (avec q différent de zéro par définition). Autrement dit, on obtient que $\partial(1/q) = 0$. Donc, la seule dérivation possible sur $\mathbf{Q}$ est la dérivation triviale.