## 0.1 Résumé

Prenons un peu notre temps et essayons de détailler (quitte à compléter) tout le fil de la discussion. L'idée est d'aboutir à une sorte de «*survey*», d'étude, d'enquête de la question. Commençons donc par la rappeler :

**Problème (POX, années 80), Intégrale du 26 mai 2021, étanche.** Soit $n$ un entier naturel positif fixé. On note $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1}$ et $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{P_n(x) - \sin(x)}{x^{2n+1}} \mathrm{d}x$.
Calculer la somme de la série

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$$

Je n'ai pas été en mesure de trouver exactement sa provenance. Ça devient encore plus embêtant dans la mesure où je ne sais pas trop comment "caractériser" le problème afin de faire des recherches ciblées dessus. (On voit qu'il est question de développement en série entière, de suites, de sommation, d'intégration... mais comment synthétiser tout cela en quelques petits mots afin de filer droit sur google ?) Là où je suis d'autant plus emmerdé c'est que dans tous les cours "bateaux", on retrouve toujours les (quasi) mêmes informations mais rien ne semblant se rapprocher d'un tel problème. Pour le coup, le problème semble bien original et est sans doute seulement un cas particulier d'un plus vaste ensemble digne d'intérêt.

Pour le résoudre, on pense naturellement à la formule de Taylor avec reste intégral. On obtient dès lors :

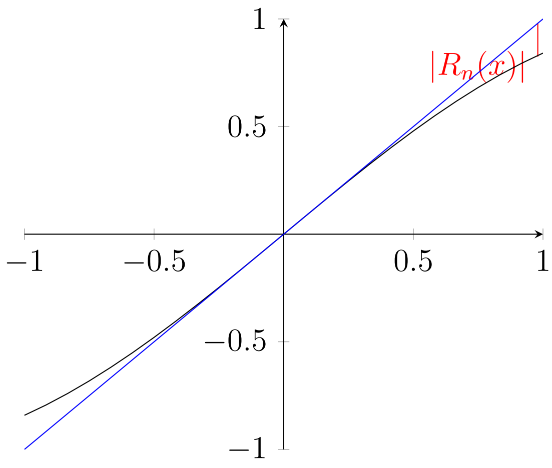
$$-R_n(x) = P_n(x) - \sin(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} - \sin(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!} x^{2k-1} - \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

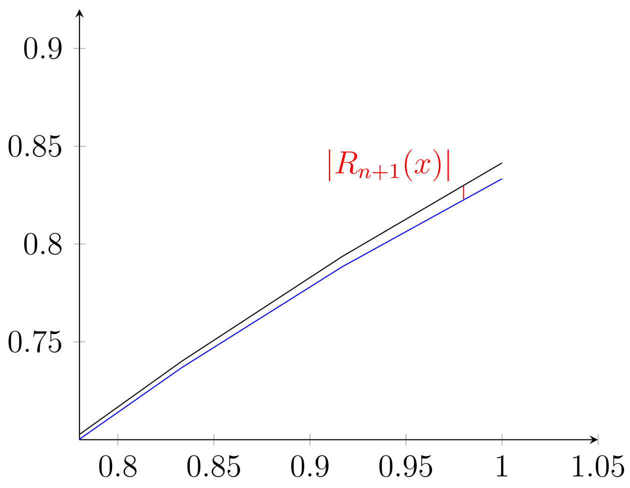
où $R_n(x)$ désigne le reste intégral.

Finalement, en accord avec ce que trouve gebrane, $-R_n(x) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}$. En faisant bien attention au signe, on trouve effectivement que $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\lim_{m \to +\infty} \sum_{k=n}^{m} \frac{(-1)^{k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x^{2n+1}} \mathrm{d}x$. Pas de surprise, tout roule (encore faudrait-il étudier la convergence). C'est ensuite que ça commence à se corser.

Dedekind93 et jandri ont tous les deux proposé un moyen de calculer la somme $S$, soit par Taylor reste intégral (et intégrales doubles, tel que suggéré par Math Coss) ou alors par intégrations par parties successives. Toutefois, existe-t'il sans doute d'autres moyens. FdP propose par exemple la recherche de relation entre $u_n$ et $u_{n+1}$ (effectivement, on peut en trouver une, mais on se retrouve avec des factorielles en cascade ; toujours est-il que la relation a été trouvée une fois le résultat connu et non avant). On peut de plus "vérifier" / expérimenter deux ou trois choses en utilisant les scripts fournis.

Un peu innocemment, essayons de comprendre comment aboutir à un tel problème ? Comment motiver la construction d'un tel énoncé, ou plutôt selon quelles motivations pourrait émaner une telle chose ?
Le terme $-R_n(x)$ peut être perçu comme une correction de la marge d'approximation polynomiale manquante dûe au fait que $n$ soit un entier naturel fini (cf. le calcul de $P_n(x)$). On présente d'ailleurs dans les deux graphiques ci-après une illustration géométrique de $R_n(x)$ et l'effet produit par une "augmentation de la précision" (c'est-à-dire une diminution de la marge d'approximation et ainsi une meilleure approximation).




Ensuite, on normalise littéralement ce terme. Pourquoi donc normaliser ? Est-ce qu'au fond on normalise vraiment ? Oh il se passe quelque chose d'évident (on prend le large et dérive un peu de la question initiale mais, étonnamment, on retombe sur nos pattes) : $\dfrac{R_n(x)}{x^{2n+1}}$ nous fout sous les yeux quelque chose de la forme : $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$, donc un polynôme (ou plutôt une série entière, où certains coefficients sont sautés). En effet : $\dfrac{R_n(x)}{x^{2n+1}} = \lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=n}^{m} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2(k-n)} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dfrac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)!} x^2 + \dfrac{(-1)^{n+2}}{(2(n+2)+1)!} x^4 + \cdots$.

Bref, en tout cas, voici un tableau récapitulatif des premières valeurs de $\dfrac{R_n(x)}{x^{2n+1}}$ :

| $n$ | $\dfrac{R_n(x)}{x^{2n+1}}$ |
|---|---|
| 0 | $\dfrac{\sin(x)}{x}$ |
| 1 | $-\dfrac{x-\sin(x)}{x^3}$ |
| 2 | $\dfrac{x^3-6x+6\sin(x)}{6x^5}$ |
| 3 | $-\dfrac{x^5-20x^3+120x-120\sin(x)}{120x^7}$ |

Le gros du problème réside dans le fait que l'on ne puisse pas casser les intégrales $\displaystyle\int \frac{R_n(x)}{x^{2n+1}}\mathrm{d}x$ en somme d'intégrales (en gros que l'on ne puisse pas faire l'interversion somme / intégrale, comme remarqué par gebrane, Riemann_lapins_cretins et Math Coss ; par exemple pour $n = 1$ : $-u_1 = \displaystyle\int_0^\infty \frac{x-\sin(x)}{x^3}\mathrm{d}x \neq \int_0^\infty \frac{x}{x^3}\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^3}\mathrm{d}x$, autrement, le problème reviendrait surtout à calculer

$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^p}\mathrm{d}x$ pour un $p$ adéquat (problème : y'a pas vraiment convergence pour les valeurs nous intéressant)).

Revenons à nos moutons : il est tout de même fascinant que tout s'orchestre et s'arrange comme il le faille : le truc permettant de normaliser n'en fait pas trop (ex. en $n$ égal zéro) mais tout juste assez pour permettre ultimement les propriétés recherchées de $u_n$ (convergence). Bref, le terme "normalisateur" «lift» (lève / relève / soulève) la propriété de convergence et nous offre ce que l'on veut. Voilà sans doute son but. Beaucoup de questions se posent à son égard : est-il unique ? Somme nous en droit d'attendre d'autres valeurs ? (Intuitivement, pourquoi ne pas dire non ?) Comment le déterminer ? Peut-il revêtir des formes plus "intéressantes" qu'une simple dépendance (linéaire qui plus est) en $n$ ? Nous verrons cela plus tard quand le contexte sera légèrement plus propice.

On a un peu tourné dans tous les sens, de manière pas très digeste pour remarquer (et commencer (seulement !) à justifier) des trucs relativement évidents. Le plus dur reste à venir. Bon dieu (j'suis pas croyant mine de rien mais belle expression voilà tout), espérons au moins qu'il n'y ait pas d'erreurs insurmontables jusque là !

## 0.2 Saut dans l'inconnu

Et c'est maintenant que les emmerdes commencent. Avant de trop s'embourber, on va chercher à voir ce que l'on a sous les yeux (tout en gardant en tête que l'idée n'est pas de construire des trucs qui semblent vaguement converger mais plutôt de chopper les idées sous-jacentes). Le gros du gros consistera en le fait de correctement et convenablement formuler ce qui apparaît devant nous (et ce n'est pas gagné).

### 0.2.1 Présentation des premiers résultats

Dans un premier temps voici un petit tableau résumant les quelques fonctions que l'on a déniché et dont on pense qu'elles fournissent des candidats intéressants pour la suite de l'aventure (déjà esquissée dans le post du 14 décembre 2021, restera à la préciser). Ensuite, on fournit un petit script pour vérifier ou expérimenter deux ou trois choses.

| Fonction étudiée | Taylor | Normalisateur | $u_n$ |
|---|---|---|---|
| $\sin(x)$ | $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$ | $x^{2n+1}$ | $\frac{(-1)^{n+1}}{2(2n)!}\pi$ |
| $\cos(x)$ | $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!}x^{2k-2}$ | $x^{2n}$ | $\frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!}n\pi$ |
| $\arctan(x)$ | $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}x^{2k-1}$ | $x^{2n+1}$ | $\frac{(-1)^{n+1}}{4n}\pi$ |
| $\exp(-x^2)$ | $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x^2)^k}{k!}$ | $x^{2n+2}$ | $\frac{(-1)^n 2^n}{(4n-3)!!}\sqrt{\pi}$ |
| $\exp(-x^3)$ | $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x^3)^k}{k!}$ | $x^{3n+2}$ | $-\frac{\Gamma(-\frac{3n+2}{3})}{3}$ |
| $\exp(-x^3)$ | $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x^3)^k}{k!}$ | $x^{3n+3}$ | $-\frac{\Gamma(-\frac{3n+1}{3})}{3}$ |
| $\ln(1+x^2)$ | $-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}x^{2k}$ | $x^{2n+2}$ | $\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\pi$ |
| $\ln(1+x^3)$ | $-\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}x^{3k}$ | $x^{3n+2}$ | $\frac{(-1)^{n+1}}{12+9(n-1)}2\sqrt{3}\pi$ |

(J'ai mis en vert ce qui est bien acquis et en gris ce qui semble juste et dont on espère que la démonstration ne contienne pas de trous.)

(Remarque vite fait : ça marche aussi avec $x^{3n+3}$ pour $\ln(1+x^3)$ ? Idem avec $\exp(-x^3)$ et $x^{3n+2}$ ? + Questions des généralisations à $\ln(1+x^q)$ et $\exp(-x^q)$ et remarque de jandri !)

```python
from sympy import Symbol, integrate, oo, sin, cos, atan, asinh, Sum, factorial, log
    , exp
from sympy.abc import i

x = Symbol('x')

def u_n_sin(n):
   return integrate((Sum(((-1)**(i - 1) * x**(2*i - 1))/factorial(2*i - 1), (i, 1,
   n)).doit() - sin(x)) / (x**(2*n + 1)), (x, 0, oo))

def u_n_cos(n):
   return integrate((Sum(((-1)**(i - 1) * x**(2*i - 2))/factorial(2*i - 2), (i, 1,
   n)).doit() - cos(x)) / (x**(2*n)), (x, 0, oo))

def u_n_arctan(n):
   return integrate((Sum(((-1)**(i - 1) * x**(2*i - 1))/(2*i - 1), (i, 1, n)).doit
   () - atan(x)) / (x**(2*n + 1)), (x, 0, oo))

def u_n_logX2(n):
    return integrate((- Sum(((-1)**(i) * (x)**(2*i))/i, (i, 1, n)).doit() - log(1+
   x**2)) / (x**(2*n + 2)), (x, 0, oo))

def u_n_logX3(n):
    return integrate((- Sum(((-1)**(i) * (x)**(3*i))/i, (i, 1, n)).doit() - log(1+
   x**3)) / (x**(3*n + 2)), (x, 0, oo))

def u_n_expX2(n):
    return integrate((Sum(( (-(x**2))**i)/factorial(i), (i, 0, n)).doit() - exp(- (
   x)**2)) / (x**(2*n + 2)), (x, 0, oo))


def u_n_expX3(n):
    return integrate((Sum(( (-(x**3))**i)/factorial(i), (i, 0, n)).doit() - exp(- (
   x)**3)) / (x**(3*n + 3)), (x, 0, oo))
```

L'idée est que si l'on choisit bien notre Taylor associé à la fonction et le normalisateur, on semble obtenir de beaux jolis résultats :). (Qu'il faut tout de même prouver ! Ok pour le sinus, passons au reste et détaillons ce dont parle jandri ; ce n'est pas encore pour tout de suite le théorème maître de Ramanujan cité par Yves... attendons (j'maîtrise rien là).)

Toujours est-il que si au moins une chose doit être retenue : l'abondance de choses de $\mathbb{Q}[\pi]$ (et autour) est impressionnante.

Essayons de démontrer un max de choses.

### 0.2.2 Cosinus

Tout va reposer sur le résultat obtenu précédemment pour $\sin(x)$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{P_n(x) - \sin(x)}{x^{2n+1}} \mathrm{d}x$$

Envisageons une intégration par partie en posant : $u(x) = P_n(x) - \sin(x)$ et $v'(x) = \frac{1}{x^{2n+1}}$. De fait : $u'(x) = P_n'(x) - \cos(x)$ et $v(x) = -\frac{1}{2nx^{2n}}$. Encore faut-il montrer que $P_n'(x)$ n'est personne d'autre que $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-2)!} x^{2k-2}$ (coucou cosinus). Donc donc donc, en injectant (et faisant spécialement gaffe aux signes) :

$$u_n = -\left.\frac{P_n(x) - \sin(x)}{2nx^{2n}}\right|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{P_n'(x) - \cos(x)}{2nx^{2n}} \mathrm{d}x$$

$$2nu_n = -\frac{P_n(x)-\sin(x)}{x^{2n}}\Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{P_n'(x)-\cos(x)}{x^{2n}}\mathrm{d}x$$

Reste plus qu'à montrer que la première quantité du côté droit de l'équation s'évapore (un petit coup de limite à droite en zéro et un théorème des gendarmes en plus l'infini ( ?) pour montrer que ça s'évanouit effectivement) et hop on est bon (cf le tableau ci-dessus :)). En effet, on obtient bien que $2nu_n(\sin) = u_n(\cos)$.

### 0.2.3 Arc tangente

Encore une fois une intégration par partie en faisant attention aux signes :

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{P_n(x)-\arctan(x)}{x^{2n+1}}\mathrm{d}x$$

$$u_n = -\frac{P_n(x)-\arctan(x)}{2nx^2n}\Bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2n}\frac{(-1)^{n+1}}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Ce qui permet bien d'obtenir le résultat escompté, cf. tableau.

### 0.2.4 Des logarithmes et exponentielles

Tout le mérite revient à jandri ; plus particulièrement à son changement de variable. Mais avant de voir cela, expérimentons brutalement et naïvement deux ou trois choses en faisant une intégration par partie de la quantité :

$$u_{n,q} = \int_0^{+\infty} \frac{P_{n,q}(x)-\ln(1+x^q)}{x^{qn+1}}\mathrm{d}x$$

en posant $u(x) = P_{n,q}(x) - \ln(1+x^q)$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^{qn+2}}$. On obtient que $u'(x) = P_{n,q}'(x) - \dfrac{qx^{q-1}}{1+x^q}$, où $P_{n,q}'(x) = q\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}x^{qn-1} = q\dfrac{(-1)^{n+1}x^{q(n+1)}+x^q}{x(x^q+1)}$. En y soustrayant $\dfrac{qx^{q-1}}{1+x^q}$ et ramenant au même dénominateur, on trouve $u(x) = q\dfrac{(-1)^{n+1}x^{q(n+1)}}{x(x^q+1)}$. De l'autre côté, on constate que $v(x) = -\dfrac{1}{(qn+1)x^{qn+1}}$.
Ainsi :

$$u_{n,q} = u(x)\cdot v(x)\Bigg|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} u'(x)\cdot v(x)\mathrm{d}x = \frac{q}{qn+1}\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{q(n+1)}}{x(x^q+1)}\frac{1}{x^{qn+1}}\mathrm{d}x$$

Donc :

$$u_{n,q} = (-1)^{n+1}\frac{q}{qn+1}\int_0^{+\infty}\frac{x^q}{x^2(x^q+1)}\mathrm{d}x = (-1)^{n+1}\frac{q}{qn+1}I_q$$

Dès lors on se retrouve emmerdé par un $I_q$. Wolfram alpha laisse planer l'idée qu'il y aurait des fonctions hypergéométriques là-dessous (et ce n'est pas la première fois que ce genre d'objets apparaît ; reste à voir comment manier la bestiole (qui a l'air trop bien mine de rien) et ce que l'on peut en espérer (sans payer trop rapidement le prix fort)). Pour $k = 2$, no problem, on sait calculer l'intégrale (et on l'a d'ailleurs déjà fait dans la sous-section juste au dessus). Ensuite c'est le bordel. Par des intégrations par parties itérées, on peut se ramener au problème de savoir (ou pas) intégrer (successivement) $\dfrac{1}{x^n+1}$, son intégrale etc... (Puis ensuite en forçant une décomposition en éléments simples mais bonne chance. Doit y avoir mieux. Quoique y'a peut-être moyen de douiller en partageant entre le cas où $n$ est pair et lorsque qu'il est impair. Une formule existe pour le cas pair (cf. juste après) mais des investigations devraient être menées pour le cas impair. Toujours est-il que ça fait des sacrées choses pas franchement simples à manier. Pour le cas pair : $\int \frac{1}{x^n+1}dx = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)\log\Big(x^2-2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)x+1\Big) - \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)\arctan\left(\frac{x-\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}{\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{n}\right)}\right)\right) + C$ ou quelque chose du style, enfin cette formule est plus donnée pour montrer la tête de la chose que pour chercher à en faire des choses (l'idée de la démonstration est d'ailleurs très naturelle, plus qu'on ne le penserait sans doute). Ah non j'ai dit une connerie : tout semble rouler que $n$ soit pair ou impair. Mais il y a même mieux. Voyons voyons. Pour le plaisir disons.)

Quelques recherches se sont imposées et la réponse a été trouvée : en conclusion, la méthode de jandri est carrément plus pratique. Mais ce qui a été trouvé semble pouvoir donner une réponse claire et précise à l'évaluation de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\alpha}$ (modulo le changement de variable) (cf. son post du 16 décembre, édité le 17).
Un commentaire (une vraie mine d'or à vrai dire...) de Dave L. Renfro sur MSE renvoie vers l'exercice 40 (page 167) du *A Treatise on the Integral Calculus* de Joseph W. Edwards que voici :
Prouver que si $p < n+1$ alors

$$na^{n-p} \int \frac{x^{p-1}}{x^n + a^n} \mathrm{d}x = \begin{cases} (-1)^{p-1} \ln(x+a) + \gamma(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2}) & \text{si } n \text{ est impair} \\ \gamma(n, \frac{n}{2}) & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

où $\gamma(i,j)$ se définit tel que :

$$-\sum_{r=1}^{i} \cos(2r-1)\frac{p\pi}{n} \log\left\{x^2 - 2ax\cos(2r-1)\frac{\pi}{n} + a^2\right\} + 2\sum_{r=1}^{j} \sin(2r-1)\frac{p\pi}{n} \tan^{-1}\left\{\frac{x - a\cos(2r-1)\frac{\pi}{n}}{a\sin(2r-1)\frac{\pi}{n}}\right\}$$

Le résultat dans le cas pair est un peu intriguant... Nous verrons bien. Il faudra le démontrer. Mais pourquoi, au juste, en aurait-on besoin ? Tout simplement pour le calcul de $I_q$ en posant $n = q$, $a = 1$ et $p-1 = q-2$, autrement dit : $p = q-1$. (HS : il y a le terme d'«intégrales binomiales» qui est ressorti quelque part, ça a l'air chouette.) Attention, peut-être faire gaffe à l'évaluation des cosinus et sinus de $\gamma$ (la parenthèse ne serait-elle pas trompeuse ? je pense sinon la fraction avec le $\pi$ sur $n$ se simplifierait ( ?) quoique (regardons le $a$ dans l'arc tangente) ; mais sinon la fraction aurait été foutue avant le sinus et le cosinus ( ?)... on le verra bien quand on démontrera... et si on essayait de le démontrer tout de suite ( ? !) mais vérifions juste que la formule ne soit pas pourrie d'avance).

On pose $n = 2$ (donc $p = 1$). En gros on va considérer : $2\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x$ (dont on connaît très bien la tête). Injectons les choses à l'intérieur :

$$2\int \frac{1}{x^2+1}\mathrm{d}x = -\sum_{r=1}^{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \log\left\{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1\right\} + 2\sum_{r=1}^{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \tan^{-1}\left\{\frac{x - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right\}$$

Et magie, avec : $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ on obtient bien le résultat escompté. Ça a pas l'air trop foireux, essayer de faire une grossière récurrence.
Soit $P(q)$ la formule certifiant que l'expression suivante est vraie (pour un certain $q$) :

$$I_q = q\int \frac{x^{q-2}}{x^q+1}\mathrm{d}x = \begin{cases} (-1)^q \ln(x+1) + \gamma(\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}) & \text{si } q \text{ est impair} \\ \gamma(q, \frac{q}{2}) & \text{si } q \text{ est pair} \end{cases}$$

avec $\gamma(i,j)$ défini par :

$$-\sum_{r=1}^{i} \cos(2r-1)\frac{(q-1)\pi}{q} \log\left\{x^2 - 2x\cos(2r-1)\frac{\pi}{q} + 1\right\} + 2\sum_{r=1}^{j} \sin(2r-1)\frac{(q-1)\pi}{q} \tan^{-1}\left\{\frac{x - \cos(2r-1)\frac{\pi}{q}}{\sin(2r-1)\frac{\pi}{q}}\right\}$$

Y'a rien de subtil mais je crois savoir comment faire : en faisant naître une relation d'origine "différentielle" ; ou pas... ça coince ; si je ne me (re-)trompe pas elle est bien pire que prévu, elle serait du style : $I_{q+1}(1 - \frac{1}{q+1}) = f(q, x; I_q'(x), I_q''(x), I_q'''(x))$ avec des termes pas du tout linéaires mais l'avantage c'est que ça donne un processus parfaitement mécanique pour démontrer le truc par récurrence.
Pour le plaisir (de tout recommencer...) voici ce qui a été obtenu :

$$I_{q+1}\cdot(1 - \frac{1}{q+1}) = x^2 \frac{I_q'}{q} \frac{x^q+1}{x^{q+1}+1} + (q+1)\left[-4\left(x^2 \frac{I_q'}{q} \frac{x^q+1}{x^{q+1}+1}\right)^2 + x^2\left[\alpha_1 (I_q')^2 + \alpha_2 I_q' \cdot I_q'' + \alpha_3 I_q' \cdot I_q''' + \alpha_4 (I_q'')^2\right]\right]$$

avec les $\alpha_i$ des formules dépendant de $x$ et $q$ pas forcément très réjouissantes. D'un côté, on peut être tenté de se dire que la relation obtenue est soit fausse soit il en existe une plus simple, mais d'un autre en voyant la gueule de $I_q$ ça semble franchement pas si cher payé (et ça pourrait sans doute prêter jeu à des généralisations afin d'en déduire le résultat d'intégrales sans avoir à passer par les fonctions hypergéométriques (quoique c'est peut-être plus simple ?)).

Commençons par déterminer $I_q^{'}$ :

$$I_q^{'} = \begin{cases} \frac{(-1)^q}{x+1} + \gamma'(\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}) & \text{si } q \text{ est impair} \\ \gamma'(q, \frac{q}{2}) & \text{si } q \text{ est pair} \end{cases}$$

avec $\gamma'(i,j)$ défini par :

$$-2\sum_{r=1}^{i} \frac{\cos\left\{(2r-1)(\pi - \frac{\pi}{q})\right\}\left(x - \cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right)\right)}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 1} + 2\sum_{r=1}^{j} \frac{\sin\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right)\sin\left(\frac{\pi(2r-1)(q-1)}{q}\right)}{x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 1}$$

Ensuite :

$$I_q^{''} = \begin{cases} \frac{(-1)^{q+1}}{(x+1)^2} + \gamma''(\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}) & \text{si } q \text{ est impair} \\ \gamma''(q, \frac{q}{2}) & \text{si } q \text{ est pair} \end{cases}$$

avec $\gamma''(i,j)$ défini par :

$$2\sum_{r=1}^{i} \frac{\cos\left((2r-1)(\pi - \frac{\pi}{q})\right)\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(2r-1)}{q}\right)\right)}{(x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 1)^2}$$

$$+4\sum_{r=1}^{j} \frac{\sin\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right)\sin\left(\frac{\pi(2r-1)(q-1)}{q}\right)\left(x - \cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right)\right)}{(x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 1)^2}$$

Puis enfin :

$$I_q^{'''} = \begin{cases} 2\frac{(-1)^q}{(x+1)^3} + \gamma'''(\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2}) & \text{si } q \text{ est impair} \\ \gamma'''(q, \frac{q}{2}) & \text{si } q \text{ est pair} \end{cases}$$

avec $\gamma'''(i,j)$ défini par :

$$4\sum_{r=1}^{i} \frac{\cos\left(\frac{\pi(2r-1)(q-1)}{q}\right)\left(\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) - x\right)\left(x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi(2r-1)}{q}\right) - 1\right)}{(x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 1)^3}$$

$$+4\sum_{r=1}^{j} \frac{\sin\left(\frac{\pi(q-1)(2r-1)}{q}\right)\sin\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right)\left(3x^2 - 6x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi(2r-1)}{q}\right) + 1\right)}{(x^2 - 2x\cos\left(\frac{\pi(2r-1)}{q}\right) + 1)^3}$$

(Ou quelque chose comme ça...)

Truc cool ( ?) les dénominateurs sont (et seront) les mêmes (enfin, à l'indice de la somme près ; mais au moins ça "simplifie" le cas impair). Y'a aussi une suite de polynômes qui semble apparaître, est-elle digne d'intérêt ?

On va chercher à démontrer que si $P(q)$ est vrai alors cela implique $P(q+1)$ (modulo la véracité de la phase d'initialisation ($q = 2$)). Euh... mais pourquoi je m'entête à vouloir le démontrer par récurrence ? Certes, l'avantage est que ça fait construire des choses peut-être utiles dans d'autres situations (e.g. la relation "différentielle" : maintenant j'ai envie d'aller chercher plein de relations différentielles associées à des intégrales relativement difficiles à calculer) mais le désavantage est que c'est bien plus long que de raisonner dans l'autre sens : partir du résultat et dériver et bonjour l'intégrande. Mais tout de même c'est sidérant de trouver une formule comme celle ci pour une telle intégrande.

@todo : Finir

### 0.2.5 Le cas des polynômes ?

À la fois simple et décevant (et qui pourrait porter un coup de poignard fatal à une idée). Si on considère le polynôme $U_m(x)$ de degré $m$, dans le calcul du $u_n$ associé, on va être un poil "embêté" dans son Taylor (ce sera le polynôme lui même en faisant gaffe de s'arrêter au bon ordre $n$). En fin de compte si $n = m$ alors $P_n(x) - U_m(x) = 0$, si $n > m$ ça ne fait aucun sens (autre qu'un zéro pointé du moins) et enfin si $n < m$ on obtient : $-\sum_{n+1}^{m} a_k x^k$. La répartition des valeurs de $u_n$ ne va pas franchement être folichonne... si $n \geq m$ alors 0 pointé autrement $(n < m)$ ça diverge bien comme il le faut.

Le problème est que l'on va se retrouver avec des égalités «que l'on ne veut pas» : par exemple : $u_{15}(X^8 - 3) = 0 = u_6(X^4 + X^2 + 1)$. Sans doute va-t'il falloir préciser ce que l'on cherche (et par exemple n'admettre la valeur 0 que lorsque $n$ tend vers plus l'infini ; et d'ailleurs prouver (si c'est bien le cas) que $u_n$ décroît nécessairement vers zéro à mesure que $n$ augmente).
Peut-être que plus tard on voudra essayer de trouver une fonction inversant le processus : en partant du résultat de $u_n(\varphi(x))$ réussir à remonter jusqu'à $\varphi(x)$. Et, si l'on ne précise pas suffisamment les hypothèses, on en viendrait à "rendre équivalents" (modulo $u_n$), par exemple $X^8 - 3$ et $X^4 + x^2 + 1$. Plus généralement, c'est l'inverse de 0 qui risquerait d'être problématique (ou pas d'ailleurs). En soit, sous les hypothèses actuelles (quand $n$ tend vers plus l'infini (s'il ne tendait pas vers plus l'infini le résultat serait un ensemble vide)), $u_n^{-1}(0)$ va être l'espace constitué de l'ensemble des fonctions de l'ensemble de définition de $u_n$ (donc sinus, cosinus...).

### 0.2.6 Un arsenal de relations

La première relation que l'on a eu sous les yeux était $2n \cdot u_n(\sin) = u_n(\cos)$. On peut en conjecturer une panoplie d'autres (qui ne laissent aucunement pantois mais qui auraient tout au contraire tendance à, quand même, sacrément faire penser que «ça n'est pas anodin»). Par exemple : $(p^2)^n u_n(\sin(x)) = u_n(\sin(px)), p^{2n+1} u_n(\cos(x)) = u_n(\cos(px)), u_n(\cos(px)) = 2pn u_n(\sin(px)), \sum_n u_n \cos(px) = (\frac{1}{2} e^{-p^2} p^3 \pi)(e^{p^2} - 1)$ ou encore : $u_n(\sin(x) + x\cos(x)) = u_n(\sin(x)) + u_n(\cos(x))$ (wooow).
On peut sans doute se demander s'il existe des relations "type Tchebychev" $(\cos(nx) = T_n(\cos(x)))$ : $u_n(\cos(px)) = T_p(u_n(\cos(x)))$ ? (Ça semble moyennement plausible, les relations obtenues suite au passage de $u_n$ semblent d'une nature toute autre.)

Oh bah tiens (pour peu qu'un certain terme s'évanouisse (comme pour l'arc tangente par exemple), à démontrer) :

$$u_n(f(x)) = u_n(f'(x)) \cdot \kappa(n)$$

Cette relation est assez saisissante. Il se pourrait peut-être aussi que l'on ait des formules du style (sous une hypothèse peut-être, mais on verra plus tard, on présente juste là) :

$$u_n(f) + u_n(g) = u_n(x^{\nu_n(g)} f + x^{\nu_n(f)} g)$$
$$u_n((\lambda + \mu) f(x)) = \lambda u_n(f(x)) + \mu u_n(f(x))$$

Plus généralement, on pourrait sans doute chercher l'ensemble des relations que $u_n$ préserve ou encore la structure (algébrique ?) sous-jacente impliquant cet arsenal de relations. Mais encore faudrait-il mieux s'armer et c'est pour quoi l'on va chercher face à qui nous sommes.

## 0.3 C'est qui l'inconnu ?

Après avoir essayé d'ouvrir les yeux, encore faut-il savoir plus précisément dans "qui" on a sauté ! Le gros problème c'est qu'on peut faire émerger plein de relations, de belles formules etc... mais réussir à saisir le fond des choses reste un ardu défi (d'autant plus que je ne serais nullement surpris de voir la nécessité d'un passage à de l'algèbre pour expliquer la logique des choses).

@todo : Faire.

### 0.3.1 Cas analytique

**Proposition 0.1.** ss

### 0.3.2 Cas algébrique

**Proposition 0.2.** ss